UNIVERSIDAD DE PANAMA

VICERRECTORIA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO

PROGRAMA DE MAESTRIA EN MATEMATICA

CON OPCION EN INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

METODOS DE CONSENSO PARA ORDENAMIENTOS ORDINALES

GLADYS ESTHER BONILLA URIBE

TESIS PRESENTADA COMO UNO DE LOS REQUISITOS PARA OPTAR AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS CON ESPECIALIZACION EN INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

PANAMA REPUBLICA DE PANAMA

2011

Vicerrectoría de Investigación y Postgrado

Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y Tecnología
Programa de Maestría en Matemática

TESIS
Sometida para optar al título de Maestría en Matemática,
con Opción en Investigación de Operaciones

La estudiante: **Gladys Esther Bonilla Uribe. Cédula N° 9-164-619**.

Título de la Tesis:

"Métodos de Consenso para Ordenamientos Ordinales

ROBADO POR:

Manuela Fost Vega

Doctora Manuela Foster Vega
Presidente

Doctor José del Rosario Garrido
Miembro

Abdel Jaén

Magíster Abdel Jaén
Miembro

EFRENDADO POR:

REPRESENTANTE DE LA VICERRECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO

CHA: 22/06/2011

DEDICATORIA

Dedico este trabajo con todo cariño a mi padre Rafael a mi madre Mitzila y a mi hermano Carlos por su constante apoyo y comprensión

Tambien se lo dedico a la persona que ha llenado mi vida de luz y de fuerza para continuar luchando a mi tesoro mi niña Andrea Isabel

AGRADECIMIENTO

Mi agradecimiento de manera especial a la profesora Manuela Foster por la asesoria brindada para la elaboración de este trabajo

Le hago extensiva mi gratitud a mis amigas Lupe Iris Lulu y Rosy por su apoyo incondicional

De igual modo a todas aquellas personas que me brindaron su ayuda para la feliz culminación de este estudio

INDICE

Resumen	1
Introduccıon	2
Capıtulo I Generalıdades sobre los ordenamıentos	7
1 1 Representacıón de los Ordenamıentos	8
1 2 Axıomas teoremas y lemas sobre la funcıón dıstancıa	10
Capıtulo II Metodos Clasıcos de Agregacıon de Ordenamıentos	23
2 1 Metodo de Agregacıon de Borda	24
2 1 1 Coefıcıentes de Borda	25
2 2 Metodo de Condorcet	26
2 2 1 Paradoja o Tnpleta de Condorcet	27
2 3 Metodo de Copeland de agregacıon de preferencıas	29
Capıtulo III Métodos de Consenso basados en dıstancıa	32
3 1 Metodo de Borda Kendall	33
3 2 Ordenamıento de Consenso utılızando la metrıca ℓ^2 (Comparacıon con el Método de Borda Kendall)	34
3 3 El Método de Mınıma Vananza	36
3 3 1 Algorıtmo de Solucıon	44
3 3 2 Ejemplo	46
3 4 Ordenamıento de Consenso utılızando la metrıca ℓ^1	50
3 4 1 Modelo 1	52
3 4 2 Modelo 2	52

3 4 3 Ejemplo de aplicacion 53

3 5 Formacion de Consenso para el caso de empates 59

3 5 1 Algoritmo de Solucion Procedimiento de Bifurcación y Acotacion 63

Conclusiones 69

Bibliografía 72

Anexo A (Elección Social y Teorema de Arrow) 74

RESUMEN

En este trabajo nos referiremos al problema de agregacion de las preferencias ordinales de un grupo de individuos que necesitan llegar a un consenso Para ello las preferencias individuales se expresan como vectores de prioridad

Se presentan tres metodos clásicos de agregación de gran importancia, por su caracter histórico y por su simplicidad en la determinacion de un ordenamiento de consenso

Se describen varios metodos de consenso basados en la distancia entre ordenamientos Uno de estos metodos considera la mediana de los ordenamientos como una forma de consenso para el caso de ordenamientos completos resolviendo un problema de asignacion Para el caso general en el que se incluyen los ordenamientos que tienen alternativas empatadas se desarrolla un procedimiento de bifurcación y acotacion para determinar el ordenamiento optimo

Tambien se presenta un metodo que es equivalente al método de Borda Kendall en el que se aplica la metrica ℓ^2 Este metodo minimiza el error cuadratico entre los ordenamientos y se puede aplicar para el caso general Se describe un algoritmo de bifurcacion y acotacion asociado al metodo

SUMMARY

In this paper we treat the problem of preference s aggregation of a group of individuals seeking consensus To do this we express individual preferences in terms of priority vectors

We review three essential classical methods of aggregation based on his historical impact and the simplicity of the determination of the ordering needed to reach consensus Most of the methods introduced in this write up are based in the distance between orderings In the case of complete orderings a method considers the mean of the orderings as a way to reach consensus by solving a certain assignment problem In the general case in which we include ties we develop a bifurcation and bounding procedure to determine optimum ordering

We also illustrate a method equivalent to Borda Kendall method in which we applied the ℓ^2 metric This method minimizes the quadratic error between orderings and can be utilize in the general case We also describe a bifurcation and bounding algorithm associated with this scheme

INTRODUCCION

Los problemas relacionados con las preferencias sociales de un grupo de individuos que necesitan lograr un consenso u opinión grupal han sido estudiados por numerosos investigadores en los ultimos siglos Esos problemas se conocen como problemas de ordenamiento y pueden clasificarse en dos categorias ordenamientos cardinales y ordenamientos ordinales

En los problemas cardinales cada individuo expresa la preferencia de una alternativa sobre otra, ademas del grado de preferencia de la alternativa Un ordenamiento cardinal es una forma de funcion de utilidad

Una funcion de utilidad es una funcion numerica que asigna una calificacion a cada posible resultado en un proceso de toma de decisiones En una escogencia entre las posibles alternativas se elige la que tiene el mayor valor en la función de utilidad Para que una función califique como funcion de utilidad la clasificacion debe ser tal que la evaluacion de las alternativas inciertas sea igual al valor esperado o esperanza matematica de todos los posibles resultados los cuales podrian ser resultados finales o alternativas inciertas ellas mismas

Los problemas de ordenamiento cardinal y la derivacion del consenso asociado conducen a la optimizacion de funciones continuas usualmente sobre la totalidad de una region convexa en $\mathbb{R}$ La familia de metricas de ℓ^p se utiliza para definir las diferentes formas que puede tomar el consenso

En los problemas de ordenamiento ordinal los individuos no expresan el grado de preferencia de las alternativas A una solución de un problema de n alternativas se le asocia una permutacion de los enteros $\{1 \ 2 \quad n\}$ Los problemas ordinales conducen a problemas de optimizacion sobre una region discreta particular en $\mathbb{R}$ por lo que se consideran mas complejos que los problemas cardinales Ademas requieren usualmente que se verifique la propiedad transitiva

Cada individuo puede suministrar inmediatamente un ordenamiento de las alternativas o realizar implicita o explicitamente comparaciones por pares de las alternativas Dado que las preferencias por pares conducen generalmente a inconsistencias o intransitividades el siguiente paso en el proceso de decision sera el de convertir las respuestas de la comparacion por pares en un ordenamiento de las alternativas

Los problemas de ordenamiento se presentan en diferentes areas tales como preferencias de consumo ordenamiento de prioridades en proyectos de investigacion y desarrollo asignacion de prioridades en proyectos de construccion preferencias electorales y mercadeo de nuevos productos

Los datos que se suministran se pueden presentar de diversas maneras pero la manera mas popular es el formato vectorial Asi en el caso de preferencias con respecto a varios productos cada consumidor p ofrece una clasificacion vectorial de sus gustos mediante un vector $\mathbf{A}^p$ tal que $\mathbf{A}^p = (a_i^p) = (a_1^p \ a_2^p \quad a^p)$

Por ejemplo en la clasificación (5 1 3 2 4) de cinco alternativas de productos a b c d e donde 1 representa la alternativa con mayor rango en la preferencia y 5 la de menor rango se indica que el producto b es el preferido de este consumidor seguido por los producto d c e y a

Con el transcurrir del tiempo varios enfoques han sido propuestos para lograr un compromiso o consenso en el caso de los ordenamientos ordinales Uno de esos primeros enfoques lo presento el francés Jean Charles de Borda en 1770 consistente en un sistema de votacion llamado Conteo de Borda, que uso la Academia de Ciencias de Francia por veinte años para elegir a sus miembros hasta que Napoleon lo eliminó en 1801 El Conteo de Borda continua en uso en instituciones academicas competiciones y asuntos politicos

Cuando las preferencias individuales se dan en terminos de ordenamiento ordinal el metodo mas simple para alcanzar consenso es la regla mayoritaria En articulos publicados en 1969 y 1964 K Inada en su trabajo *The Simple Majority Rule* y *A Note On The Simple Majority Rule* presento condiciones bajo las cuales la regla mayoritaria se transforma en una funcion de bienestar social Esta funcion satisface las condiciones de K J Arrow publicadas en su obra *Social Choice and Individual Values* en 1951 (Anexo A) En extensiones a los trabajos de Inada, por parte de Bowman y Colantoni en 1972 y 1973 y de Blin y Whinston en 1974 se establecio que los problemas asociados a la regla mayoritaria con la transitividad se resuelven construyendo modelos via programacion entera

M Kendall propuso en 1962 una alternativa al problema del consenso En su trabajo represento las preferencias en términos de *vectores de prioridades* una forma de consenso se logra sumando los vectores y luego se considera el vector promedio No necesariamente el vector promedio satisface las propiedades de una función de selección social pero es la tecnica de mayor uso de todas las disponibles

En 1962 como resultado de las investigaciones de Kemeny y Snell publicadas en Preference Ranking An Axiomatic Approach se propone un metodo novel para derivar el consenso Se introduce el concepto de distancia en el conjunto de todos los ordenamientos y luego se determina el ordenamiento ordinal que es el mas cercano posible al conjunto de las clasificaciones O sea, se debera buscar la distancia minima entre un cierto vector de ordenamiento y el conjunto de los ordenamientos Lo que ocurre es que tal medida es un indicador del grado de correlacion o no entre dos clasificaciones cualesquiera

Para lograr lo anterior ambos investigadores proponen un conjunto de axiomas que toda funcion distancia debera satisfacer para luego probar su existencia y unicidad Los axiomas gozan de la particularidad de ser similares a los propuestos por Arrow sin requerir de la condicion de las alternativas irrelevantes

Empleando la función distancia, es posible proponer al ordenamiento medio y a la mediana de un ordenamiento como formas de consensos en ℓ^1 y ℓ^2 respectivamente Cabe observar que en general $\ell^p = \{(x_1\ x_2\ x_3\ \ )/x \in \mathbb{R}\}$ es un espacio vectorial de dimension infinita En el caso de ℓ^1 es el espacio vectorial de todas las series que convergen absolutamente y ℓ^2 es el espacio vectorial de las sucesiones de cuadrado sumable que es a su vez un Espacio de Hilbert

La norma ℓ^2 tiene el atractivo adicional de estar asociada con modelos de cuadrado minimo lo que formaliza las marcas de Borda (1780) y Kendall (1962) De hecho las representaciones de ordenamientos de Borda y Kendall son equivalentes para distancias asociadas a ℓ^1 y ℓ^2

En este trabajo nos concentraremos en los problemas de ordenamiento ordinal y al problema relacionado de la derivacion del consenso o compromiso

El Capitulo I trata sobre las generalidades de los ordenamientos ordinales Primero se presenta la terminologia que se utilizara en este trabajo Luego se muestran los axiomas que debe satisfacer una medida de distancia Finalmente se incluyen los teoremas y lemas relacionados a la distancia entre los ordenamientos

El Capitulo II presenta tres metodos clasicos de agregacion de ordenamientos Estos metodos estan relacionados directamente con la teoria de la eleccion y con los estudios de los sistemas de votacion

El Capitulo III presenta varios metodos de consenso basados en una medida de distancia Se consideran las métricas ℓ^1 y ℓ^2 asi como los ordenamientos completos y los ordenamientos con empates Se desarrolla un ejemplo utilizando el algoritmo de solucion sobre el método de Mínima Varianza Tambien se resuelve un ejemplo utilizando el modelo 2 como un problema de asignacion

Finalmente se agrega un anexo sobre las condiciones de K L Arrow y la funcion de Seleccion Social

CAPITULO I

GENERALIDADES SOBRE LOS ORDENAMIENTOS

GENERALIDADES SOBRE LOS ORDENAMIENTOS

La agregacion de preferencias individuales ha sido objeto de estudio por un gran numero de autores durante mas de dos siglos Entre los problemas de agregacion o problemas de ordenamiento estan aquellos en los que un grupo de evaluadores expresan sus preferencias sobre un conjunto finito de alternativas a traves de posiciones en una escala ordinal buscando una ordenacion final de dicho conjunto de alternativas En estos problemas no se necesita expresar el grado de preferencia asociado a cada posición de la escala ordinal Tambien se conocen como problemas de ordenamiento ordinal

A los problemas de agregacion en los que los evaluadores tambien expresan el grado de preferencia de cada alternativa se les conoce como problemas de ordenamiento cardinal como se plantea en los modelos de teoria de la utilidad

En el caso de los problemas de ordenamiento ordinal muchos investigadores han trabajado en proponer soluciones enmarcadas en la teoria de la eleccion y en los estudios de los sistemas de votación Otros han elaborado métodos para obtener una ordenacion de alternativas que se basan en la definicion de funciones de distancia

En esta ocasion nos referiremos unicamente a los problemas de ordenamiento ordinal y al problema relacionado con la derivación del consenso o compromiso en terminos de una funcion distancia Presentamos a continuacion la terminologia utilizada

1 1 Representacion de los ordenamientos

Un ordenamiento **A** de n objetos se representa por un vector $\mathbf{A} = (a_1\ a_2\ \ \ a_n)$ donde a es el rango o prioridad del i esimo objeto o es el promedio en el caso de empate

La representacion de un ordenamiento **A** depende del orden en el que los objetos son enumerados o etiquetados

Definicion 1 1 1 Forma canonica

El ordenamiento **A** esta descrito en forma canónica si $a \leq a_{i+1}$ donde $i = 1\ 2 \quad n\ 1$

Definición 1 1 2

El ordenamiento **B** esta entre los ordenamientos **A** y **C** representado por [**A B C**] si para cada objeto $i \quad a \leq b \leq c$ o $a \geq b \geq c$

Definición 1 1 3

Los ordenamientos $\{\mathbf{A}\}_{i\ 1}^{l}$ estan en linea si para todo $i < j < k \quad [\mathbf{A} \quad \mathbf{A}^{j}\ \mathbf{A}^{k}]$

Definición 1 1 4

Un ordenamiento completo es aquel que no contiene empates es decir $a_i \neq a_j$ para todo i=1 2 $\quad n$

Definicion 1 1 5

El ordenamiento cero es aquel en el que todos los objetos estan empatados y se denota por

$$\mathbf{0} = \left(\frac{n+1}{2} \ \frac{n+1}{2} \quad \frac{n+1}{2} \right)$$

Definición 1 1 6

El ordenamiento inverso de **A** es $\overline{\mathbf{A}} = \left(\overline{a}_1\ \overline{a}_2 \quad \overline{a}\ \right)$ donde $\overline{a} = n + 1 - a$ Es decir $\overline{\mathbf{A}}$ es el ordenamiento obtenido al invertir el orden de los objetos en **A** Para cualquier **A** se tiene que $[\mathbf{A} \quad \mathbf{0} \quad \overline{\mathbf{A}}]$

1 2 Axiomas, teoremas y lemas sobre la funcion distancia

Algunas técnicas para determinar un ordenamiento de consenso introducen una función distancia para el conjunto de ordenamientos El ordenamiento de consenso deberá minimizar la distancia total o el desacuerdo entre los ordenamientos existentes

Sean **A** **B** y **C** tres ordenamientos la distancia entre ordenamientos debe satisfacer las siguientes condiciones

Axioma 1 2 1 $d(\mathbf{A}\ \mathbf{B}) \geq 0$ con la igualdad si $\mathbf{A} = \mathbf{B}$

Axioma 1 2 2 $d(\mathbf{A}\ \mathbf{B}) = d(\mathbf{B}\ \mathbf{A})$

Axioma 1 2.3 $d(\mathbf{A}\ \mathbf{C}) \leq d(\mathbf{A}\ \mathbf{B}) + d(\mathbf{B}\ \mathbf{C})$ con la igualdad si y sólo si el ordenamiento **B** está entre **A** y **C**

Axioma 1 2 4 Invarianza

a) Si **A** resulta de **A** por una permutacion de los objetos y **B** resulta de **B** por la misma permutacion entonces $d(\mathbf{A}\ \mathbf{B}) = d(\mathbf{A}\ \mathbf{B})$

b) Si $\overline{\mathbf{A}}$ y $\overline{\mathbf{B}}$ resultan de invertir el orden de los objetos de **A** y de **B** entonces

$$d(\overline{\mathbf{A}}\ \overline{\mathbf{B}}) = d(\mathbf{A}\ \mathbf{B})$$

Tambien si dos ordenamientos estan en completo acuerdo o en conformidad en sus primeras y en sus ultimas componentes y difieren solamente de los rangos de los k objetos que estan en el medio entonces la distancia entre esos dos ordenamientos es la misma si se consideran todos los objetos o unicamente los k objetos

Dados dos ordenamientos bajo estas condiciones al conjunto formado por los k objetos en el medio donde los dos ordenamientos difieren se le llama segmento Asi un conjunto de objetos **S** es un segmento si no está formado por todo el conjunto de objetos y cada objeto que no esta en el conjunto **S** es ordenado antes o despues de cada objeto de **S**

Axioma 1 2 5 Cambio de la dimension del espacio de n a $n+1$

Si **A** y **B** son dos ordenamientos de n objetos y **A** y **B** son los ordenamientos que resultan de **A** y **B** agregandole el mismo objeto $(n+1)$ de ultimo en ambos ordenamientos entonces $\mathrm{d}(\mathbf{A}\ \ \mathbf{B}\ ) = \mathrm{d}(\mathbf{A}\ \mathbf{B})$

Axioma 1 2 6 Escala

La minima distancia positiva es 1

A continuacion se establecera que los axiomas determinan univocamente la distancia d para todo n Ademas la funcion distancia caracterizada por estos axiomas tiene una forma particularmente simple Para concluir que esto es asi se demostraran los siguientes lemas y teoremas

Teorema 1 2 1 Si los ordenamientos $\{\mathbf{A}\ \}^{l}_{\ 1}$ están alineados entonces

$$\mathrm{d}(\mathbf{A}^{1}\ \ \mathbf{A}^{l}) = \sum_{1}^{l\ 1} \mathrm{d}(\mathbf{A}\ \ \ \mathbf{A}\ ^{1})$$

Demostracion Dado que los ordenamientos $\mathbf{A}^{1}$ hasta $\mathbf{A}^{l}$ estan alineados el Axioma 1 1 3 garantiza la igualdad por induccion en l

Teorema 1 2 2 Para $n = 2$ hay tres posibles ordenamientos y los valores de las nueve distancias resultantes estan definidas por los seis axiomas

Demostracion Para $n=2$ hay tres posibles ordenamientos $\mathbf{A}=(1\ 2)$ $\overline{\mathbf{A}}=(2\ 1)$ y $\mathbf{0}=(\frac{3}{2}\ \frac{3}{2})$ Ademas existen nueve posibles distancias cuyos valores se determinan a continuación

De acuerdo al Axioma 1 2 1 $d(\mathbf{A}\ \mathbf{A}) = d(\overline{\mathbf{A}}\ \overline{\mathbf{A}}) = d(\mathbf{0}\ \mathbf{0}) = 0$

Por el Axioma 1 2 2

$$d(\mathbf{A}\ \overline{\mathbf{A}}) = d(\overline{\mathbf{A}}\ \mathbf{A}) \quad d(\mathbf{A}\ \mathbf{0}) = d(\mathbf{0}\ \mathbf{A}) \quad d(\overline{\mathbf{A}}\ \mathbf{0}) = d(\mathbf{0}\ \overline{\mathbf{A}})$$

Como $[\mathbf{A}\ \mathbf{0}\ \overline{\mathbf{A}}]$ segun el Axioma 1 2 3

$$d(\mathbf{A}\ \overline{\mathbf{A}}) = d(\mathbf{A}\ \mathbf{0}) + d(\mathbf{0}\ \overline{\mathbf{A}})$$

Por el Axioma 1 2 4 se tiene que

$$d(\mathbf{A}\ \mathbf{0}) = d(\overline{\mathbf{A}}\ \mathbf{0}) = d(\mathbf{0}\ \overline{\mathbf{A}})$$

Asi es suficiente determinar $d(\mathbf{A}\ \mathbf{0})$ Por todo lo anterior esta claro que $d(\mathbf{A}\ \mathbf{0})$ es la distancia minima positiva, y por el Axioma 1 2 6 la distancia $d(\mathbf{A}\ \mathbf{0}) = 1$

De esta forma quedan determinadas las nueve distancias que se originan a partir de los tres ordenamientos asociados a $n=2$

Lema 1 2 1 Sean **A** y **B** ordenamientos en $\mathbb{R}$ ambos con el elemento n o sea, existen i y j enteros positivos tales que $a_i = n$ y $b_j = n$ Existe un ordenamiento **C** en $\mathbb{R}$ tal que **A** **C** y **B** están alineados Además **C** resulta de intercambiar las posiciones i ésima y j esima en uno de los ordenamientos y diferirá en un segmento o sera identico al otro ordenamiento

Demostracion Suponga que $\mathbf{A}$ esta escrito en forma canonica y $b_k = n$ Entonces

$$\mathbf{A} = (a_1\ a_2\ \ \ a_{k-1}\ a_k\ a_{k\ 1}\ \ \ a\ _1\ n)\ \text{ y }\ \mathbf{B} = (b_1\ b_2\ \ \ b_{k\ 1}\ n\ b_{k\ 1}\ \ \ b\ _1\ b\ )$$

Se construye $\mathbf{C}$ de la siguiente forma

Caso I $a_k \leq b$

$$c\ = \begin{cases} b & \text{si } \imath = k \\ n & \text{si } \imath = n \\ b & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Caso II $a_k > b$

$$c\ = \begin{cases} n & \text{si } \imath = k \\ a_k & \text{si } \imath = n \\ a & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Segun la construccion de $\mathbf{C}$ se observa que $[\mathbf{A}\quad \mathbf{C}\quad \mathbf{B}]$ y que $\mathbf{C}$ resulta de intercambiar la $\imath$ esima y $\jmath$ esima posicion de uno de los ordenamientos Este cambio causa que $\mathbf{C}$ difiera unicamente en un segmento del otro ordenamiento excepto cuando $a_k = b_n$ y $a\ = b$ para todo $\imath \neq k$ para todo n por lo cual en este caso $\mathbf{C} = \mathbf{A}$

Teorema 1 2 3 Para cualquier entero positivo n sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ ordenamientos completos Entonces las distancias d($\mathbf{A}\quad \mathbf{B}$) y d($\mathbf{A}\quad \mathbf{0}$) estan determinadas por los Axiomas 1 2 1 a 1 2 6

Demostracion Se procede por inducción

El caso $n = 2$ esta dado por el Teorema 1 2 2

Se supone ahora que las distancias d(**A** **B**) y d(**A** **0**) estan determinadas para todos los ordenamientos **A** **B** en $\mathbb{R}^m$ con $m < n$ Sean **A** y **B** ordenamientos completos en $\mathbb{R}$ y se asume que **A** esta escrito en forma canonica. Se procede por partes

a Se demostrara que la distancia d(**A** **0**) esta determinada

Se denota por $\lfloor x \rfloor$ a la funcion piso o funcion parte entera Sea $k = \left\lfloor \frac{(n+1)}{2} \right\rfloor + 1$ y **D** el ordenamiento dado por

$$d = \begin{cases} k+j-1 & \text{si } i=1 \qquad n-k+1 \\ i-(n-k+1) & \text{si } i=n-k+2 \qquad n \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \left(1\ 2 \qquad n-k+1\ n-k+2 \qquad n\right) \\ \mathbf{D} &= \left(k\ k+1 \qquad n\ 1 \qquad k-1\right) \end{aligned}$$

De acuerdo a la seleccion de k se tiene que

$$k-1 \leq \frac{(n+1)}{2} < k$$

$$n-k+1 \leq \frac{(n+1)}{2} < n-k+2$$

Con base a la escogencia anterior se deduce que los ordenamientos **A** **0** y **D** estan alineados y por el Axioma 1 2 3

$$\mathrm{d}(\mathbf{A}\ \mathbf{D}) = \mathrm{d}(\mathbf{A}\ \mathbf{0}) + \mathrm{d}(\mathbf{0}\ \mathbf{D})$$

Como la permutacion que transforma el ordenamiento **A** en **D** deja a **0** inalterable el Axioma 1 2 4 afirma que $\mathrm{d}(\mathbf{A}\ \mathbf{0}) = \mathrm{d}(\mathbf{D}\ \mathbf{0})$ Ademas por el Axioma 1 2 2 $\mathrm{d}(\mathbf{D}\ \mathbf{0}) = \mathrm{d}(\mathbf{0}\ \mathbf{D})$ luego $\mathrm{d}(\mathbf{A}\ \mathbf{0}) = \mathrm{d}(\mathbf{0}\ \mathbf{D})$

Por el Axıoma 1 2 6 $\quad \mathrm{d}(\mathbf{A}\ \mathbf{0}) = \frac{1}{2}\mathrm{d}(\mathbf{A}\ \mathbf{D})$

Como ambos ordenamıentos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{D}$ tıenen el elemento n el Lema 1 2 1 garantıza la exıstencıa del ordenamıento $\mathbf{C}$ tal que $[\mathbf{A}\ \ \mathbf{C}\ \ \mathbf{D}]$ El ordenamıento $\mathbf{C}$ resulta de ıntercambıar n y $k-1$ en el ordenamıento $\mathbf{D}$ ya que $n-k+1 \leq k-1$

Ası

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \left(1\ 2 \quad n-k+1\ n-k+2 \quad n\right)\\
\mathbf{C} &= \left(k\ k+1 \quad k-1\ 1 \quad n\right)\\
\mathbf{D} &= \left(k\ k+1 \quad n\ 1 \quad k-1\right)
\end{aligned}$$

Por el lema 1 2 1 $\mathbf{C}$ dıfiere de $\mathbf{A}$ y de $\mathbf{D}$ en segmentos (propıos) para $n \geq 3$ y por lo tanto $k-1>1$ En consecuencıa, la dıstancıa $\mathrm{d}(\mathbf{A}\ \mathbf{D}) = \mathrm{d}(\mathbf{A}\ \mathbf{C}) + \mathrm{d}(\mathbf{C}\ \mathbf{D})$ esta determınada

Puesto que $\mathrm{d}(\mathbf{A}\ \mathbf{0}) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}(\mathbf{A}\ \mathbf{D})$ entonces la dıstancıa $\mathrm{d}(\mathbf{A}\ \mathbf{0})$ esta determınada para cualquıer ordenamıento completo $\mathbf{A}$

b Se establecera que la dıstancıa $\mathrm{d}(\mathbf{A}\ \mathbf{A})$ esta definıda

Sı $\mathbf{A}$ se define como el ordenamıento que ıntercambıa la $\imath$ esıma y $\jmath$-ésıma posıcıon de $\mathbf{A}$ la componente k ésıma de $\mathbf{A}$ esta definıda por

$$a_k = \begin{cases} a_\jmath & \text{sı } k = \imath \\ a & \text{sı } k = \jmath \\ a_k & \text{sı } k \neq \imath\ \jmath \end{cases}$$

Sı se supone que $\imath < \jmath$ entonces sı $\imath > 1$ o $\jmath < n$ $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}$ dıfieren en un segmento (propıo) y la dıstancıa $\mathrm{d}(\mathbf{A}\ \mathbf{A})$ esta determınada con base a lo anterıor

Sı se supone que $\imath = 1$ y $\jmath = n$ Como $[\mathbf{A}\ \mathbf{A}\ \overline{\mathbf{A}}]$ se tıene que

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\mathbf{A}\ \mathbf{A}) &= \mathrm{d}(\mathbf{A}\ \bar{\mathbf{A}}) - \mathrm{d}(\mathbf{A}\ \bar{\mathbf{A}}) \\ &= \mathrm{d}(\mathbf{A}\ \mathbf{0}) + \mathrm{d}(\mathbf{0}\ \bar{\mathbf{A}}) - \mathrm{d}(\mathbf{A}\ \bar{\mathbf{A}})\end{aligned}$$

Ya que $\mathbf{A}$ y $\bar{\mathbf{A}}$ dıfieren en un segmento (propıo) entonces la dıstancıa $\mathrm{d}(\mathbf{A}\ \bar{\mathbf{A}})$ esta determınada por la hıpótesıs de ınduccıón Por lo tanto la dıstancıa $\mathrm{d}(\mathbf{A}\ \mathbf{A})$ esta determınada para cualquıer ordenamıento completo $\mathbf{A}$

c Se demostrara que la dıstancıa $\mathrm{d}(\mathbf{A}\ \mathbf{B})$ esta determınada para cualquıera de los ordenamıentos completos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$

Sı se supone que $b_k = n$ entonces $\mathbf{A} = (1\ 2 \quad k \quad n)$ y $\mathbf{B} = (b_1\ b_2 \quad n \quad b\ )$

Sı $\mathbf{B} = \mathbf{A}$ la dıstancıa $\mathrm{d}(\mathbf{A}\ \mathbf{B})$ está determınada por lo demostrado en el paso anterıor

Sı $\mathbf{B} \neq \mathbf{A}$ y $\mathbf{C}$ es el ordenamıento dado en el Lema 1 2 1 entonces

$$\mathrm{d}(\mathbf{A}\ \mathbf{B}) = \mathrm{d}(\mathbf{A}\ \mathbf{C}) + \mathrm{d}(\mathbf{C}\ \mathbf{B})$$

donde $\mathbf{C}$ resulta de ıntercambıar la k esıma y n esıma posıcıon en uno de los ordenamıentos y dıferırа del otro ordenamıento por un segmento Las dıstancıas $\mathrm{d}(\mathbf{A}\ \mathbf{C})$ y $\mathrm{d}(\mathbf{C}\ \mathbf{B})$ estan determınadas por el paso b y por la hıpotesıs de ınduccıon Ası la dıstancıa $\mathrm{d}(\mathbf{A}\ \mathbf{B})$ esta determınada por cualquıera de los dos ordenamıentos completos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$

Lema 1 2 2 Dado un ordenamıento $\mathbf{A}^0$ en $\mathbb{R}$ exısten ordenamıentos $\mathbf{A}^1\ \mathbf{A}^2 \quad \mathbf{A}^l$ y $\tilde{\mathbf{A}}^1\ \mathbf{A}^2 \quad \mathbf{A}^l$ en $\mathbb{R}$ tales que a $\mathbf{A}^{l}$ $\mathbf{A}^{l\ 1}$ $\tilde{\mathbf{A}}^{2}$ $\tilde{\mathbf{A}}^{1}$ $\mathbf{A}^{0}$ $\mathbf{A}^{1}$ $\mathbf{A}^{2}$ $\mathbf{A}^{l}$ están sobre una línea,

b $\mathbf{A}^{l}$ y $\mathbf{A}^{l}$ son ordenamientos completos

c Las distancias

$$\mathrm{d}(\mathbf{A}^{0}\ \mathbf{A}^{l})=\sum_{0}^{l\ 1}\mathrm{d}(\mathbf{A}\ \ \mathbf{A}\ ^{1}) \quad \mathrm{y} \quad \mathrm{d}(\mathbf{A}^{0}\ \tilde{\mathbf{A}}^{l})=\sum_{0}^{l\ 1}\mathrm{d}(\tilde{\mathbf{A}}\ ^{1}\ \tilde{\mathbf{A}}\ )$$

son iguales y estan determinadas por los axiomas

Demostracion Supongamos que $\mathbf{A}^{0}$ esta escrito en forma canonica y a_{j} a_{j+1} a_{k} forman el i esimo bloque de empates es decir $a_{j}=a_{j\ 1}=\ =a_{k}=(j+k)/2$

$\tilde{\mathbf{A}}^{i}$ y $\mathbf{A}$ estan definidos por

$$a_{h}=\begin{cases} h & \text{si } j\leq h\leq k \\ a_{h}{}^{1} & \text{en otro caso}\end{cases}$$

$$\tilde{a}_{h}^{i}=\begin{cases} k+j-h & \text{si } j\leq h\leq k \\ a_{h}{}^{1} & \text{en otro caso}\end{cases}$$

donde $\tilde{\mathbf{A}}^{0}=\mathbf{A}^{0}$

Por construcción los ordenamientos adyacentes difieren unicamente en el i-esimo bloque de empates y la distancia $\mathrm{d}(\mathbf{A}\ \ \mathbf{A}\ ^{1})=\mathrm{d}(\tilde{\mathbf{A}}^{i\ 1}\ \ \tilde{\mathbf{A}}\ )$ puede representarse como la distancia entre un ordenamiento completo y el cero en $\mathbb{R}^{k\ j\ 1}$ Además por el Teorema 1 2 2 la distancia está determinada.

Puesto que cada ordenamiento tiene al menos un bloque de empates esto conduce a los ordenamientos completos $\mathbf{A}^{l}$ y $\tilde{\mathbf{A}}^{l}$

Los ordenamientos estan sobre una linea ya que la j-esima componente de la sucesión

$\mathbf{A}^{l}\ \tilde{\mathbf{A}}^{l\ 1}\qquad \mathbf{A}^{2}\ \tilde{\mathbf{A}}^{1}\ \mathbf{A}^{0}\ \mathbf{A}^{1}\ \mathbf{A}^{2}\qquad \mathbf{A}^{l}$ es monotona

Asi por el Teorema 1 2 1 las distancias $d(\mathbf{A}^{0}\ \mathbf{A}^{l})$ y $d(\mathbf{A}^{0}\ \tilde{\mathbf{A}}^{l})$ están determinadas por

$$d(\mathbf{A}^{0}\ \mathbf{A}^{l})=\sum_{0}^{l\ 1}d(\mathbf{A}\quad \mathbf{A}\ ^{1})\quad \text{y}\quad d(\mathbf{A}^{0}\ \mathbf{A}^{l})=\sum_{0}^{l\ 1}d(\mathbf{A}\ ^{1}\ \mathbf{A}\ )$$

Lema 1 2 3 Sea **B** un ordenamiento en $\mathbb{R}$ escrito en forma canonica y suponga que $b_j=b_{j\ 1}=\quad=b_k=(j+k)/2$ es un bloque de empates Si **C** está definido por

$$c_i=\begin{cases} j & \text{si } i=j \\ k & \text{si } i=k \\ b & \text{en otro caso} \end{cases}$$

entonces la distancia $d(\mathbf{B}\ \mathbf{C})$ está determinada por los axiomas

Demostracion Considere los ordenamientos

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \left(b_1\ \ b_2\qquad b_j\ b_{j\ 1}\qquad b_{k\ 1}\ b_k\qquad b\ \right)\\ \mathbf{C} &= \left(b_1\ \ b_2\qquad j\ b_{j\ 1}\qquad b_{k\ 1}\ k\qquad b\ \right)\ \text{y}\\ \mathbf{D} &= \left(b_1\ \ b_2\qquad j\ \ j+1\qquad k-1\ \ k\qquad b\ \right) \end{aligned}$$

Puesto que $[\mathbf{B}\ \mathbf{C}\ \mathbf{D}]$ se tiene que $d(\mathbf{B}\ \mathbf{C})=d(\mathbf{B}\ \mathbf{D})-d(\mathbf{C}\ \mathbf{D})$

Sin embargo las distancias $d(\mathbf{B}\ \mathbf{D})$ y $d(\mathbf{C}\ \mathbf{D})$ se pueden representar como las distancias de un ordenamiento completo al cero en $\mathbb{R}^{k\ j\ 1}$ y $\mathbb{R}^{k\ j\ 1}$ respectivamente Por el Teorema 1 2 2 esas distancias estan determinadas y asi la distancia $d(\mathbf{B}\ \mathbf{C})$ esta determinada por los axiomas

Lema 1 2 4 Sea $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ un ordenamıento en $\mathbb{R}$ y consıdere los ordenamıentos

$$\mathbf{C}_1 = \left(1\ a_1+1\ a_2+1 \quad\quad a\ _1+1\ a\ +1\ n+2\right) \ \text{y}$$
$$\mathbf{C}_2 = \left(a_1+1\ 1\ a_2+1 \quad\quad a\ _1+1\ n+2\ a\ +1\right)$$

Entonces la dıstancıa $\mathrm{d}(\mathbf{C}_1\ \mathbf{C}_2)$ esta determınada.

Lema 1 2 5 Sea $\mathbf{A}$ un ordenamıento en $\mathbb{R}$ y $\mathbf{A}$ el ordenamıento que resulta de cambıar la $\imath$ esıma y $\jmath$ ésıma componentes Entonces la dıstancıa $\mathrm{d}(\mathbf{A}\ \mathbf{A})$ esta determınada por los axıomas

Teorema 1 2 4 Para cualquıer n sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ ordenamıentos en $\mathbb{R}$ Entonces la dıstancıa $\mathrm{d}(\mathbf{A}\ \mathbf{B})$ está determınada por los axıomas

Demostracıon Se supone que $\mathrm{d}(\mathbf{A}\ \mathbf{B})$ esta determınada para todos los ordenamıentos $\mathbf{A}\ \mathbf{B} \in \mathbb{R}^m$ con $m < n$

Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ ordenamıentos en $\mathbb{R}$ y se supone que $\mathbf{B}$ esta escrıto en forma canonıca Sı $\mathbf{B} = \mathbf{A}$ la dıstancıa $\mathrm{d}(\mathbf{A}\ \mathbf{B})$ esta determınada por el Lema 1 2 5 Por lo tanto se supone que $\mathbf{B} \neq \mathbf{A}$

Caso 1 $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ tıenen el elemento n

Por el Lema 1 2 1 exıste un ordenamıento $\mathbf{C}$ en $\mathbb{R}$ tal que $[\mathbf{A}\ \mathbf{C}\ \mathbf{B}]$ por lo tanto $\mathrm{d}(\mathbf{A}\ \mathbf{B}) = \mathrm{d}(\mathbf{A}\ \mathbf{C}) + \mathrm{d}(\mathbf{C}\ \mathbf{B})$

Como $\mathbf{C}$ resulta de cambıar la $\imath$ ésıma y la $\jmath$ ésıma posıcıon de uno de los ordenamıentos y dıfiere por un segmento del otro ordenamıento esas dıstancıas están determınadas por el Lema 1 2 5 y por la hıpotesıs de ınduccıon respectıvamente Ası la dıstancıa $\mathrm{d}(\mathbf{A}\ \mathbf{B})$ está determınada

Caso 2 **A** y **B** no tienen el elemento n

Supongamos que $b \quad \neq n$ Sea $k = \inf\{ j / b_j = b \ \}$ entonces

$\mathbf{A} = (a_1 \ a_2 \qquad a_k \qquad a \ _1 \ a \ )$ y $\mathbf{B} = (b_1 \ b_2 \qquad b_k \qquad b \ _1 \ b \ )$

Se supone sin perder la generalidad que $a_k \leq a_{k \ 1}$

Sea $\tilde{\mathbf{B}} = (b_1 \ b_2 \qquad n \ b_{k \ 1} \qquad b \ _1 \ k)$ Se demostrará que la distancia d(**A** **B**) puede expresarse en términos de la distancia d(**A** $\tilde{\mathbf{B}}$)

Si **A** tiene el elemento n la distancia d(**A** $\tilde{\mathbf{B}}$) está determinada por el caso 1 Si **A** no tiene el elemento n se repite la construccion cambiando los roles de **A** y **B** obteniendo la distancia d(**A** $\tilde{\mathbf{B}}$) en terminos de la distancia d($\tilde{\mathbf{A}}$ $\tilde{\mathbf{B}}$) que se ha determinado por el caso 1

Caso 2a. $a \ \leq b \quad$ o $\quad a \ \geq b$

En este caso como $[\mathbf{A} \ \mathbf{B} \ \mathbf{B}]$ se tiene que $\mathrm{d}(\mathbf{A}\ \mathbf{B}) = \mathrm{d}(\mathbf{A}\ \tilde{\mathbf{B}}) - \mathrm{d}(\mathbf{B}\ \tilde{\mathbf{B}})$ Además la distancia d(**B** **B**) esta determinada por el Lema 1 2 3 Asi la distancia d(**A** **B**) esta determinada por la distancia d(**A** $\tilde{\mathbf{B}}$)

Caso 2b $a_k \geq b_k$

Si $a_k \geq b_k$ entonces $a \ \geq b$ para $i = k \ \ k+1 \qquad n$ Esto es posible unicamente si $a \ = b$ para $i = k \ \ k+1 \qquad n$ Asi la distancia d(**A** **B**) puede ser considerada como la distancia entre dos ordenamientos en $\mathbb{R}^{k \ 1}$ que se determina por la hipotesis de induccion

Caso 2c $\quad a \ \leq b$ (y por lo tanto $a_i \leq b$ para $i = k \ \ k+1 \qquad n$)

Sean $\mathbf{A}$ $\mathbf{B}$ y $\mathbf{D}$ los ordenamientos

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \left(a_1\ a_2 \quad a_k \quad a\ \ n+1\right) \\ \mathbf{B} &= \left(b_1\ b_2 \quad b_k \quad b\ \ n+1\right) \text{ y} \\ \mathbf{D} &= \left(b_1\ b_2 \quad n \quad n+1\ k\right) \end{aligned}$$

Entonces por el Axioma 1 2 5 $\mathrm{d}(\mathbf{A}\ \mathbf{B}) = \mathrm{d}(\mathbf{A}\ \ \mathbf{B}\ ) = \mathrm{d}(\mathbf{A}\ \ \mathbf{D}\ ) - \mathrm{d}(\mathbf{B}\ \ \mathbf{D}\ )$

Primero se considerará la distancia $\mathrm{d}(\mathbf{B}\ \ \mathbf{D}\ )$

Sea $\mathbf{B}\ = \left(b_1\ \ b_2 \quad b_k \quad b_{\ 1}\ \ n+1\ \ b\ \right)$ entonces $\mathrm{d}(\mathbf{B}\ \ \mathbf{D}\ ) = \mathrm{d}(\mathbf{B}\ \ \mathbf{B}\ ) + \mathrm{d}(\mathbf{B}\ \ \mathbf{D}\ )$ donde la distancia $\mathrm{d}(\mathbf{B}\ \ \mathbf{B}\ )$ esta determinada por el Lema 1 2 5 y la distancia $\mathrm{d}(\mathbf{B}\ \ \mathbf{D}\ )$ está determinada por el Lema 1 2 3 Por lo tanto la distancia $\mathrm{d}(\mathbf{B}\ \ \mathbf{D}\ )$ está determinada

Como $\mathbf{A}$ y $\mathbf{D}$ tienen el elemento n por el Lema 1 2 1 hay un ordenamiento $\mathbf{C}$ entre $\mathbf{A}$ y $\mathbf{D}$ que resulta al cambiar los ultimos dos elementos de uno de los ordenamientos y difiere del otro por un segmento Asi

$$\mathrm{d}(\mathbf{A}\ \ \mathbf{D}\ ) = \mathrm{d}(\mathbf{A}\ \ \mathbf{C}) + \mathrm{d}(\mathbf{C}\ \mathbf{D}\ )$$

donde una de las distancias de la derecha esta determinada por el Lema 1 2 5 y la otra es equivalente a la distancia $\mathrm{d}(\mathbf{A}\ \tilde{\mathbf{B}})$ Luego la distancia $\mathrm{d}(\mathbf{A}\ \mathbf{B})$ está determinada por la distancia $\mathrm{d}(\mathbf{A}\ \tilde{\mathbf{B}})$ como se ha demostrado

Teorema 1 2 5 La distancia d entre dos ordenamientos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dada por

$$\mathrm{d}(\mathbf{A}\ \mathbf{B}) = \sum |a\ \ - b\ |$$

satisface los seis axiomas

Demostracion Los Axiomas 1 2 1 y 1 2 2 son inmediatos

Sean a, b y c en $\mathbb{R}$ se tiene que $|a-c| \le |a-b| + |b-c|$ En particular $\sum_i |a_i - c_i| \le \sum_i |a_i - b_i| + \sum_i |b_i - c_i|$ para toda i por lo cual el Axioma 1 2 3 se satisface Si $a_i \le b_i \le c_i$ entonces se cumple la igualdad

Una permutación de los objetos corresponde a una permutación de los indices que afecta unicamente el orden en que los términos son añadidos Al invertir el orden de los objetos se altera el valor de los terminos pero

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}(\mathbf{A}\ \mathbf{B}) &= \sum_i |a_i - b_i| \\
&= \sum_i \left| (n+1-a_i) - (n+1-b_i) \right| \\
&= \sum_i |\bar{a}_i - \bar{b}_i| \\
&= \mathrm{d}(\bar{\mathbf{A}}\ \bar{\mathbf{B}})
\end{aligned}
$$

Asi la distancia d satisface el Axioma 1 2 4

Se tiene que $|a_i - b_i| = \left|(k + a_i) - (k + b_i)\right|$ lo que satisface el Axioma 1 2 5

Por el Teorema 1 2 1 la distancia d satisface el Axioma 1 2 6

CAPITULO II

METODOS CLASICOS DE AGREGACIÓN DE ORDENAMIENTOS

METODOS CLASICOS DE AGREGACIÓN DE ORDENAMIENTOS

Se presentan tres tecnicas conocidas como los metodos de consenso mas populares Estos metodos se han desarrollado esencialmente de la práctica y generalmente del entorno de la votacion preferencial

2 1 Metodo de Agregacion de Borda

Es un metodo de decision para comités formados por varias personas y fue propuesto por el Caballero Jean Charles de Borda

Borda senaló ante la Real Academia de Ciencias de Paris que el procedimiento de pluralidad, mediante el cual el que votaba por los nueve miembros en los distintos cuerpos de la citada institucion incurria en un grave error permitia que resultase ganador un candidato que fuera el menos deseado por la mayoria de los votantes Borda detectó que esto se debia a que los electores al emitir sus votos solo informaban del candidato mas deseado por cada cual descartando al resto de los candidatos en bloque aun cuando la importancia de los candidatos no votados en cada caso fuese muy distinta Para disminuir el error Borda propuso el metodo que lleva su nombre por el que los votantes califican correlativamente a todos los candidatos de menor a mayor segun su merito y el candidato con menor puntuacion total seria el ganador

Esta tecnica es una de las mas utilizadas para determinar un ordenamiento de consenso por su simplicidad computacional Sin embargo muchos autores consideran que es un método que aparentemente no satisface propiedades importantes o que no posee la estructura de una función de bienestar social

El metodo de Borda consiste en sumar los rangos obtenidos por una alternativa con respecto a cada uno de los criterios (o votantes) Para un criterio dado se le asigna un punto a la alternativa que aparezca en primer lugar 2 puntos a la alternativa en segundo lugar 3 puntos a la tercera alternativa, etc El ordenamiento de consenso o ganador de Borda se obtiene efectuando la suma de los puntos obtenidos en todos los criterios por cada una de las alternativas y clasificando en primer lugar aquella con menor puntuación en segundo lugar la que tenga un numero inmediatamente superior etc

2 1 1 Coeficientes de Borda

Modificando ligeramente el procedimiento basico de Borda, la alternativa clasificada en primer lugar sera la que obtuvo la mayor puntuacion y no la que obtuvo menor puntuacion

Se consideran m alternativas y m enteros $k_1 > k_2 > k_3 > \quad > k_m \geq 0$ llamados coeficientes de Borda Para cada criterio j las alternativas se clasifican segun un preorden total y se denomina r_{ij} al rango de la alternativa i para el preorden asociado al criterio j Las alternativas forman, respecto al criterio j un camino de preferencias del tipo $a_{1j} \succ a_{2j} \succ a_{3j} \approx a_{4j} \succ \quad a_{(m-1)j} \succ a_{mj}$ donde $\succ$ designa la preferencia estricta y $\approx$ la indiferencia Se designa rg a la funcion que asocia k_1 con a_{1j} k_2 con a_{2j} y asi sucesivamente cuando solo hay preferencias estrictas Si hay empates (indiferencias) se atribuye a cada una de las alternativas empatadas la media de los coeficientes que habrian obtenido si no estuvieran empatados

Definida la funcion rg para cada criterio j se calcula $b(a_i) = \sum_j rg(a_{ij})$ obteniendo para cada alternativa i la suma de los puntos que ha obtenido en cada criterio y la ordenacion agregada sera la definida por la funcion b

Proposicion 2 1 1 La agregacion de Borda resuelve el problema de la ordenacion ya que genera un preorden total en el conjunto de las alternativas La ordenación de Borda es puramente ordinal

En efecto la agregacion de Borda esta definida sobre la matriz de rangos por lo que es independiente de las utilidades y por lo tanto es un metodo ordinal

La funcion $b(a_i)$ es real e induce un orden total luego es una funcion de utilidad Lo que queda demostrado

Si se introduce o se elimina una o mas alternativas cuando se utiliza el procedimiento de Borda, se puede alterar el resultado Esto quiere decir que el metodo no respeta el axioma de independencia respecto a las alternativas irrelevantes (Ver el Anexo A)

Ademas la ordenacion de Borda depende de los coeficientes elegidos y por lo tanto es posible a través de ellos alterar la ordenacion final

2 2 Metodo de Condorcet

Fue propuesto por el Marques de Condorcet Marie Jean Antoine Nicolas Caritat miembro del Instituto Nacional de Francia (nombre que recibió la Real Academia de Ciencias tras el periodo revolucionario hasta el advenimiento de Napoleon)

Condorcet reconocio el merito de Borda sobre el tema de la agregacion de las preferencias bajo la optica de las votaciones pero manifesto que la regla de puntuaciones de Borda era susceptıble de seleccıonar como ganador a un candıdato que a su vez fuese derrotado por mayorıa sımple por alguno de sus oponentes en una confrontacıon entre ellos dos para el colectıvo de votantes

En contraste al método de Borda, Condorcet propone que sı un candıdato o alternatıva domına a todas las demas entonces ese candıdato debe ganar

Definıcıon 2 2 1

Se denomına votacıon por mayorıa sımple o procedımıento de agregacıon de Condorcet al procedımıento que para toda pareja de alternatıvas $(a_i\ a_j)$ consıste en plantear $a \succ a_j$ sı y solo sı el numero de crıterıos en los que a domına a a_j es estrıctamente superıor al numero para los que se verıfica la ınversa Se deduce que $a \approx a_j$ en caso de ıgualdad en el numero de crıterıos a favor y en contra

Definıcıon 2 2 2

Se denomına Ganador de Condorcet a la alternatıva que domına a todas las demás en la relacıon socıal resultante del método de Condorcet

2 2 1 Paradoja o Trıpleta de Condorcet

Sean a b y c tres alternatıvas Se consıderan las sıguıentes preferencıas respecto a tres crıterıos o candıdatos $a \succ_1 b \succ_1 c$ $b \succ_2 c \succ_2 a$ $c \succ_3 a \succ_3 b$

La relacıon socıal generada tras la votacıon por mayorıa sımple es

$$a \succ b \quad b \succ c \quad y \quad c \succ a$$

Se dıce que las alternatıvas a b y c forman un cıclo producıendose lo que se conoce como paradoja de Condorcet

Proposición 2 2 1 El metodo de Condorcet es un método ordinal que conduce a una relacion social total que satisface el axioma de independencia respecto a las alternativas irrelevantes pero que no es necesariamente transitivo

Demostracion El metodo de Condorcet es ordinal porque actua sobre los preordenes asociados a los criterios sin que intervengan las utilidades

La relacion social es total ya que dos alternativas cualesquiera siempre resultan ordenadas entre si

La ordenacion mutua entre dos alternativas no depende mas que de la clasificacion relativa de las dos alternativas en cuestion para cada uno de los criterios por lo que satisface el axioma de las alternativas irrelevantes

El metodo de Condorcet no conduce siempre a una relación social transitiva, como se muestra en la paradoja de Condorcet

El metodo de Condorcet cumple con la propiedad de que los criterios (o votantes) son independientes Para demostrar esto se necesitaran las siguientes definiciones y proposiciones

Definición 2 2.3

Se dice que una pareja de alternativas $(a\ \ a_k)$ es equivalente a otra pareja de alternativas $(a\ \ a\ )$ o que tiene los mismos criterios si y solo si tienen los mismos criterios a favor y los mismos criterios en contra Esto se denota como $(a\ \ a_k)\,\mathrm{MC}\,(a\ \ a\ )$ Es decir que

$$\{j / a \succ_j a_k\} = \{j / a \succ_j a\ \} \quad \text{y} \quad \{j / a_k \succ_j a\ \} = \{j / a \succ_j a\ \}$$

MC es una relacion de equivalencia y $(a\ \ a_k)\,\mathrm{MC}\,(a\ \ a\ ) \Leftrightarrow (a_k\ \ a_l)\,\mathrm{MC}\,(a\ \ a\ )$

Definıcıon 2 2 4

Un procedımıento de agregacıon se denomına no compensatorıo sı y solo sı cumple que para todo $a_i\ a_k\ a\ a\ \ (a\ \ a_k)\,\mathrm{MC}\,(a\ \ a\ ) \Rightarrow [a \succ a_k \Leftrightarrow a \succ a\ ]$ En caso contrarıo se denomınará compensatorıo Es decır no puede haber compensacıon de lo que se pıerde en un crıterıo con lo que se gana en el otro

Proposıcıon 2.2.2

El procedımıento de Condorcet es no compensatorıo

Demostracıon Sean $a\ \ a_k\ \ a\ \ a$ cuatro alternatıvas cualesquıera Sı se supone que $(a\ \ a_k)\,\mathrm{MC}\,(a\ \ a\ )$ sıgnıfica que

$$\{\jmath / a \succ_\jmath a_k\} = \{\jmath / a \ \succ_\jmath a\ \} \ \text{ y } \ \{\jmath / a_k \succ_\jmath a_i\} = \{\jmath / a \ \succ_\jmath a\ \}$$

Sı $a \succ a_k$ sıgnıfica que el numero de crıterıos tales que $\{\jmath / a \succ_\jmath a_k\}$ es estrıctamente superıor al numero de crıterıos tales que $\{\jmath / a_k \succ_\jmath a\ \}$ Debıdo a la relacıon MC esto se extıende a la pareja $(a\ \ a\ )$ y en consecuencıa $a \succ a$

2 3 Metodo de Copeland de agregacıon de preferencıas

Es un metodo propuesto por A H Copeland y es derıvado del metodo de Condorcet Consıste en calcular la suma de las vıctorıas menos las derrotas en una votacıon por mayorıa sımple y en ordenar las alternatıvas en funcıon de su resultado

Proposicion 2.3 1

El metodo de Copeland produce un preorden social total Si el método de Condorcet genera un preorden total entonces el de Copeland genera el mismo preorden el cual es similar al obtenido sumando las victorias de cada alternativa

Demostracion La relacion es total y transitiva ya que la funcion suma de puntos es una función real Esta funcion es una funcion de utilidad del preorden social

Si el metodo de Condorcet genera un preorden social se puede disponer a las alternativas como un camino Sea a una alternativa y sea r su rango partiendo del final Entonces existen $q = (m-1) - r - p$ alternativas mejores que a donde los p son las alternativas del mismo rango (empatadas con a sin incluirla) y los r son las alternativas peores

Con esto el numero de victorias de una alternativa a cualquiera es igual a r el numero de derrotas es igual a q Ademas el numero de Copeland Cop_i es

$$\text{Cop} = r - q = 2r + p - m + 1$$

Sean a y a_k dos alternativas tales que $a \succ a_k$ segun Condorcet entonces sus numeros de victorias verificaran que $r > r_k$

El numero q_k de derrotas de a_k cumple con $q_k > q + p$ De las dos desigualdades se obtiene que $r - q - p > r_k - q_k$ y como $p \geq 0$ entonces $\text{Cop} > \text{Cop}_k$ Por lo tanto $a \succ a_k$ segun Copeland

Sean dos alternatıvas a_i y a_k tales que $a \succ a_k$ segun Copeland entonces $\mathrm{Cop} > \mathrm{Cop}_k$ Se supone que $r = r_k$ entonces a y a_k estan empatadas y debe ocurrır que $q = q_k$ lo cual se contradıce

Se supone que $r < r_k$ entonces en los vencedores de a estan comprendıdos los de a_k y sus empatados lo que sıgnıfica que $q > q_k + p_k$ Comparando las dos desıgualdades se obtıene que $r > r_k + p_k$ lo cual se contradıce puesto que $p_k \geq 0$

De esta manera, sı el método de Condorcet conduce a un preorden los metodos de Condorcet y Copeland producen el mısmo resultado Ademas basta con contar las vıctorıas r_k

Los metodos de Borda o de Copeland cumplen cuatro de los Axıomas de Eleccıon pero no el Axıoma de ındependencıa con respecto a las alternatıvas ırrelevantes El metodo de Borda tıene la ventaja de ser sencıllo de ejecutar y de proporcıonar resultados aceptables

El metodo de Condorcet cumple con cuatro de los axıomas pero no sıempre cumple con la transıtıvıdad Sı los crıterıos no son tan contradıctorıos puede que no se presente tanta ıntransıtıvıdad y se logre una buena solucıon Tambıen sı se restrınge el domınıo de la función de Seleccıon Socıal el procedımıento de Condorcet serıa transıtıvo pero no cumplırıa el Axıoma de Unıversalıdad

CAPITULO III

METODOS DE CONSENSO BASADOS EN DISTANCIA

METODOS DE CONSENSO BASADOS EN DISTANCIA

3 1 Metodo de Borda Kendall

El problema de agregación de preferencias individuales expresadas de manera ordinal ha sido tratado en la mayor parte de los casos sobre la teoria de la eleccion y en los estudios de los sistemas de votacion

Como se planteo en el Capitulo 2 Borda estudio el problema relacionandolo a la eleccion de candidatos y propuso el metodo que actualmente se conoce como *marcas de Borda* Segun este procedimiento los candidatos se ordenan en funcion del valor de la suma de las marcas el cual es igual a la posicion del ordenamiento asignado por los electores a cada candidato

Kendall fue el primero en estudiar el problema desde un punto de vista estadístico Abordo el problema de ordenacion de alternativas como un problema de estimación buscando una ordenacion de consenso que maximice el acuerdo entre los evaluadores La solucion ofrecida por Kendall ordena las alternativas de acuerdo con la suma de las posiciones que ocupa cada alternativa, lo que coincide con el metodo de Borda Este metodo se conoce como metodo de Borda Kendall y debido a su simplicidad es el metodo mas utilizado para obtener un ordenamiento de consenso

Otro conjunto de metodos para obtener una ordenacion de alternativas se basa en la definicion de funciones de distancia que obtienen una evaluacion de consenso que se encuentra tan proxima como sea posible de las evaluaciones individuales realizadas por los votantes proximidad que se mide a traves de diferentes funciones de distancia

En 1982 Cook y Seiford mostraron la equivalencia del metodo Borda Kendall con un modelo basado en distancias cuando se aplica la metrica l^2 para el caso de ordenamientos completos Este modelo y su generalizacion para ordenamientos con empates se desarrollan a continuacion

3 2 Ordenamiento de Consenso utilizando la métrica ℓ^2 (Comparación con el Metodo de Borda Kendall)

Entre las tecnicas de agregacion de ordenamientos ordinales hay una tecnica que minimiza la suma de las desviaciones cuadradas a cada uno de los m ordenamientos $\{\mathbf{A}^1\ \mathbf{A}^2\ \ \ \mathbf{A}^m\}$ Para ello se define la distancia entre ordenamientos $\mathrm{d}(\mathbf{A}\ \mathbf{B}) = \sum_1^m (a_i - b_i)^2$ (ℓ^2 o metrica euclidiana) y se elige el centro de masa como el ordenamiento de consenso es decir que minimiza

$$\mathrm{M}(\mathbf{B}) = \sum_l \mathrm{d}(\mathbf{A}^l\ \mathbf{B}) = \sum_l \sum (a^l - b\ )^2$$

Asi hay dos posibles enfoques al problema El método Borda Kendall (BK) que ordena los objetos de acuerdo con las sumas de los rangos y el metodo denominado de *Minima Varianza* que minimiza el error cuadratico

El metodo Borda Kendall produce un ordenamiento que minimiza la suma de los cuadrados de las diferencias entre los totales y lo que ellos serian si todos los ordenamientos fueran semejantes es decir el metodo Borda Kendall selecciona el ordenamiento **B** que minimiza

$$\mathrm{U}(\mathbf{B}) = \sum (s\ \ - mb\ )^2$$

donde $s = \sum_{i\;1}^{m} a^i$ Esto es valido solo en el caso de ordenamientos completos Si hay empates el metodo BK no funciona puesto que el ordenamiento **B** obtenido no necesariamente minimizara a U(**B**)

Teorema 3 2 1

Las siguientes tres afirmaciones son equivalentes

a) **B** minimiza $\mathrm{M}(\mathbf{B}) = \sum_{i} \sum_{i} (a^i - b)^2$

b) **B** minimiza $\mathrm{U}(\mathbf{B}) = \sum (s - mb)^2$ donde $s = \sum_{i\;1}^{m} a^i$

c) **B** minimiza $\bar{\mathrm{U}}(\mathbf{B}) = \sum (\bar{s} - b)^2$ donde $\bar{s} = \frac{1}{m} \sum_{i\;1}^{m} a^i$

Demostracion Equivalencia de (a) y (c)

$$\bar{\mathrm{U}}(\mathbf{B}) = \sum (\bar{s} - b)^2$$

$$= \sum (\bar{s}^2 - 2\,\bar{s}_i\, b + b^2)$$

$$= \sum_{i} \bar{s}^2 + \left(\sum b^2 - 2 \sum \bar{s}\; b \right)$$

$$\mathrm{M}(\mathbf{B}) = \sum_{i} \sum (a^i - b)^2$$

$$= \sum_{i} \sum \left[\left(a^i\right)^2 - 2a^i\, b + (b)^2 \right]$$

$$= \sum \left[\sum_{i} \left(a^i\right)^2 - 2b\, m\bar{s} + m(b)^2 \right]$$

$$= \left[\sum \sum_{i} (a^{i})^{2} \right] + m \left[\sum (b\,)^{2} - 2\sum \bar{s}\; b \,\right]$$

La minimizacion de $\mathbf{M(B)}$ y $\bar{\mathrm{U}}(\mathbf{B})$ depende en ambos casos solamente del término

$$\left[\sum (b\,)^{2} - 2\sum \bar{s}\; b \,\right]$$

De acuerdo al Teorema 3 2 1 el ordenamiento obtenido por el metodo de Minima Varianza es el ordenamiento mas cercano al punto promedio $\bar{\mathbf{S}}$ dado por el promedio de las componentes una a una Por esta razon y porque tal ordenamiento minimiza el error cuadratico al ordenamiento obtenido se le denominara **ordenamiento medio**

En el caso de ordenamientos completos el metodo de Borda Kendall y el metodo de Minima Varianza son equivalentes puesto que ambos determinan los mismos ordenamientos medios Sin embargo cuando hay empate el metodo BK no determina necesariamente un ordenamiento medio

3 3 El Método de Minima Varianza

Es una tecnica que se puede utilizar para los casos completos y los que aceptan empates Para un conjunto de m ordenamientos $\left\{\mathbf{A}^{i}\right\}_{i\,1}^{m}$ donde $\mathbf{A}^{i} = \left(a_{1}^{i}\;\, a_{2}^{i} \qquad a^{i}\right)$ sea $\bar{\mathbf{S}} = \left(\bar{s}_{1}\;\, \bar{s}_{2} \qquad \bar{s}\,\right)$ el punto promedio definido como el vector de promedios dado por

$$\bar{s} = \frac{1}{m}\sum_{i} a^{i}$$

El ordenamiento medio puede ser definido como el ordenamiento **B** que esta mas cerca del punto promedio es decir que minimiza $\bar{\mathrm{U}}(\mathbf{B}) = \sum \left(\bar{s} - b\,\right)^{2}$

El punto promedio es un vector en $\mathbb{R}$ pero no necesariamente corresponde a un ordenamiento Una condicion necesaria (pero no suficiente) que un vector de ordenamiento debe satisfacer es

$$\frac{p(p+1)}{2} \leq \sum_{K} a \leq \frac{2np+p-p^2}{2} \qquad p=1\ 2 \qquad n$$

para cada subconjunto K_p de los indices de cardinalidad p

Para $p=1$ esta condicion cumple que $1 \leq a \leq n$ para todo i Mientras que para $p=n$ se reduce a $\sum_{1} a = \frac{n(n+1)}{2}$

En las figuras (Fig 1 Fig 2 Fig 3)[1] se ilustra el espacio de ordenamientos cuando $n=2\ 3\ 4$ respectivamente utilizando la condicion anteriormente descrita Los ordenamientos estan en la dimension $(n-1)$ dada por

$$\sum_{1} x = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{y} \quad x \geq 0 \quad \text{para todo } i \tag{1}$$

Los ordenamientos completos son los puntos extremos que resultan al agregar las restricciones adicionales

$$\frac{p(p+1)}{2} \leq \sum_{K} x \leq \frac{2np+p-p^2}{2} \qquad p=1\ 2 \qquad n-1 \tag{2}$$

Para $n=2$ y $n=3$ estas restricciones adicionales se reducen a $1 \leq x \leq n$ para todo i Los ordenamientos con empates corresponden a los puntos medios de las caras El ordenamiento en el que todos los objetos estan empatados es el punto medio del poliedro

[1] Tomadas de la tesis doctoral de la profesora Manuela Foster Vega

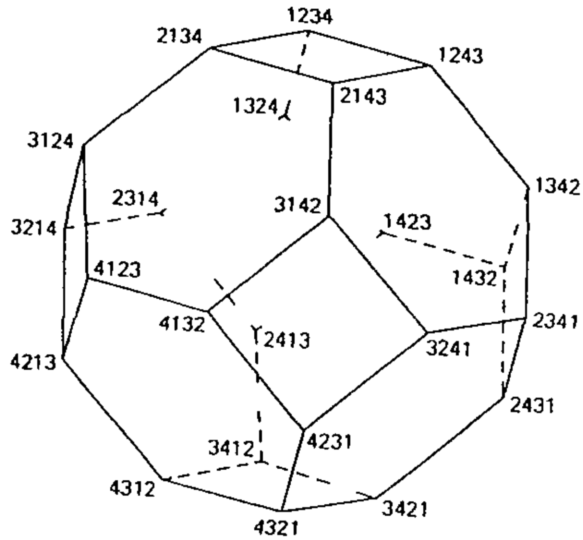


Fig 3 Espacio de ordenamientos cuando $n = 4$

El punto promedio $\overline{\mathrm{S}}$ satisface las condiciones (1) y (2) y está en el poliedro es decir en el casco convexo de los ordenamientos completos Ademas el espacio de los ordenamientos de $(n-1)$ objetos esta contenido en el espacio de los n objetos Esto se ilustra en la figura (Fig 4) para $n = 4$

Para dos objetos cualesquiera i y j $i \neq j$ la ecuacion $x_i = x_j$ define un hiperplano que biseca el espacio de ordenamientos en dos regiones Una region contiene los ordenamientos para los $x < x_j$ y la otra region consiste de los ordenamientos para los $x_i > x_j$ Los ordenamientos en los que los objetos i y j estan empatados estan sobre el hiperplano

El conjunto de los hiperplanos produce una subdivision del espacio de n ordenamientos en $n!$ regiones contenidas en un cono poliédrico Cada cono tiene su vertice en el origen del espacio (el ordenamiento en el que todos los objetos estan empates) y contiene exactamente un ordenamiento completo

Las aristas del cono estan formadas de todos los ordenamientos con empates que son adyacentes al ordenamiento completo Esto puede verse en la figura (Fig 5) para $n = 3$

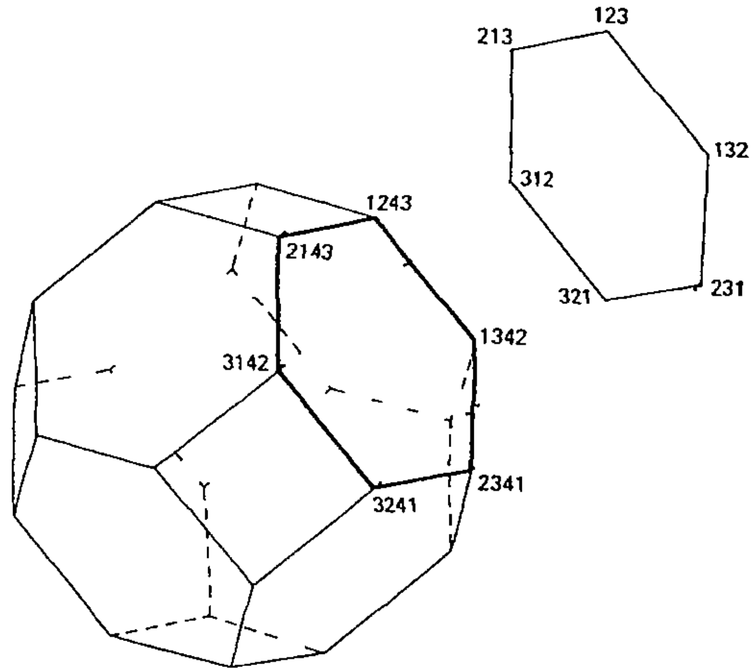


Fig 4

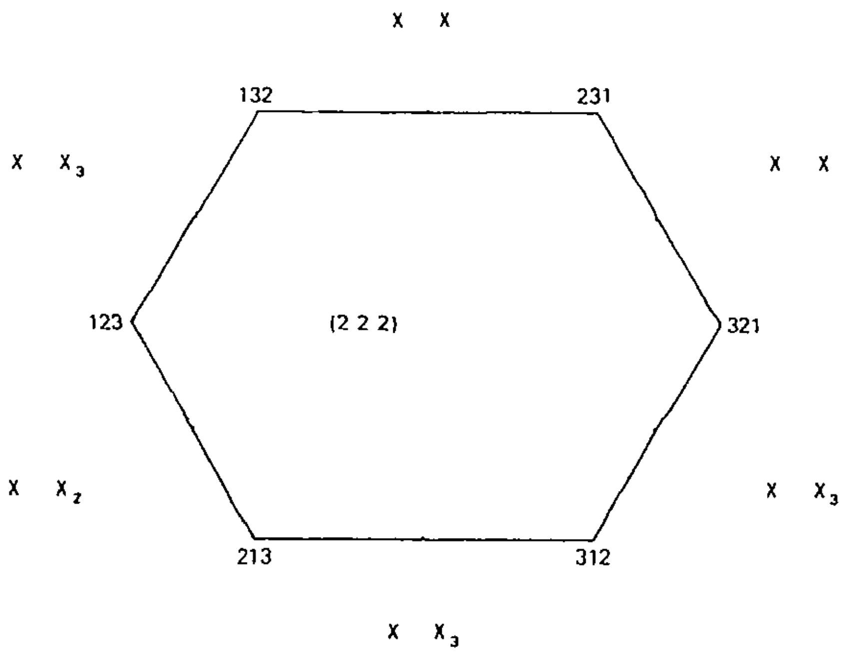
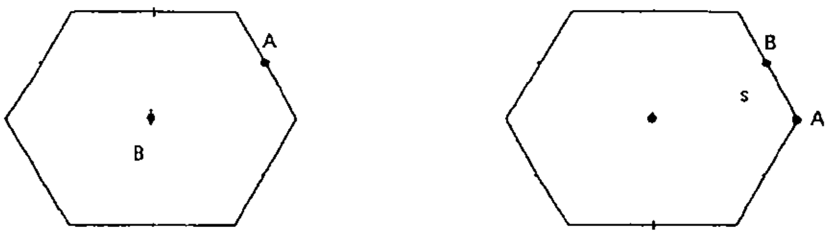


Fig 5 Hiperplanos cuando $n = 3$

El metodo de minima varianza selecciona el ordenamiento que esta más cerca del punto promedio sin embargo el metodo de BK identifica las regiones con ordenamientos Segun BK si el punto promedio esta en el interior de uno de los conos poliedricos se selecciona el ordenamiento completo asociado al cono si el punto promedio esta sobre la frontera de un cono se selecciona el ordenamiento con empates asociado a la frontera del cono

De acuerdo con esto mediante el metodo BK se puede elegir un ordenamiento que no este tan cerca del punto promedio En la figura siguiente (Fig 6) se puede observar este comportamiento



B ordenamiento medio $\overline{\mathbf{S}}$ punto promedio

A ordenamiento elegido por el metodo de BK

Fig 6 Espacio de ordenamientos

Para determinar el ordenamiento medio se consideran unicamente los ordenamientos adyacentes al punto promedio La subdivision del espacio de los ordenamientos por medio de los hiperplanos sugiere que estos sean los ordenamientos del cono que contengan el punto promedio Esto se formaliza en el siguiente teorema

Teorema 3 3 1 El ordenamiento medio no invierte las preferencias dadas por el punto promedio Es decir que si $\mathbf{B}=\left(b_1\ b_2\ \ \ b\ \right)$ es el ordenamiento medio entonces

$s\ < s_j \Rightarrow b\ \leq b_j$

Demostracion

Suponga que $s\ < s_j$ y $b\ > b_j$ Sea $\mathbf{B}$ la imagen de $\mathbf{B}$ por el hiperplano $x_i = x_j$ obtenida intercambiando b y b_j es decir

$$b_k = \begin{cases} b & \text{si } k = j \\ b_j & \text{si } k = i \\ b_k & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \bar{\mathrm{U}}(\mathbf{B}) - \bar{\mathrm{U}}(\mathbf{B}\ ) &= \left[\left(b\ - \bar{s}\ \right)^2 + \left(b_j - \bar{s}_j\right)^2\right] - \left[\left(b\ - \bar{s}\ \right)^2 + \left(b_j - \bar{s}_j\right)^2\right] \\ &= \left[\left(b\ - \bar{s}\ \right)^2 + \left(b_j - \bar{s}_j\right)^2 - \left(b_j - \bar{s}\ \right)^2 - \left(b\ - \bar{s}_j\right)^2\right] \\ &= 2\left(b\ - b_j\right)\left(\bar{s}_j - \bar{s}\ \right) > 0 \end{aligned}$$

Asi $\bar{\mathrm{U}}(\mathbf{B})$ no es minimal y $\mathbf{B}$ no es el ordenamiento medio por lo que queda demostrado

El metodo de minima varianza determina el ordenamiento medio $\mathbf{B}$ minimizando $\mathrm{M}(\mathbf{B})$ pero por el Teorema 3 2 1 existe una formulacion equivalente para determinar $\mathbf{B}$ y es minimizando $\bar{\mathrm{U}}(\mathbf{B})$

$$\text{minimizar} \quad \bar{\mathrm{U}}(\mathbf{B}) = \sum\left(\bar{s} - b\ \right)^2 \quad \text{donde } \bar{s} = \frac{1}{m}\sum_{1}^{m} a^l$$

Cuando se encuentra **B** mediante esta forma, puede ocurrir que $\bar{\mathbf{S}}$ sea un ordenamiento y en tal caso la solución inmediata seria $\mathbf{B} = \bar{\mathbf{S}}$ pero este caso no es comun

Si se consideran los ordenamientos completos el problema es el siguiente

$$\min_{\mathbf{B}\ \mathbf{C}} \bar{\mathrm{U}}(\mathbf{B}) = \sum_{i} \left(\bar{s} - b\right)^2$$

donde **C** *es el conjunto de los ordenamientos completos*

Mediante el metodo BK se encuentra la solución correcta al problema Hay otros metodos alternos pero carecen de la simplicidad del metodo Borda Kendall

Para el caso no restringido Cook y Seiford proponen un algoritmo de bifurcación y acotacion La propiedad monotona no decreciente que se describe en el Teorema 3 3 1 provee un punto inicial Sin perder la generalidad se supone que el punto promedio $\bar{\mathbf{S}}$ satisface $\bar{s}_1 \le \bar{s}_2 \le \quad \le \bar{s}$

El Teorema 3 3 1 garantiza la existencia de un ordenamiento medio **B** tal que $b_1 \le b_2 \le \quad \le b$ Este orden limita los posibles valores que puede tomar b_1 al conjunto $\left\{1\ 1\ 5\ 2\ 2\ 5 \qquad \frac{(n+1)}{2}\right\}$ Para cada posible valor de b_1 los posibles valores que b_2 puede tomar tambien se restringen a un conjunto especifico Y asi con todos los demas b La figura (Fig 7) describe un arbol con los posibles valores para b_i cuando $n = 5$

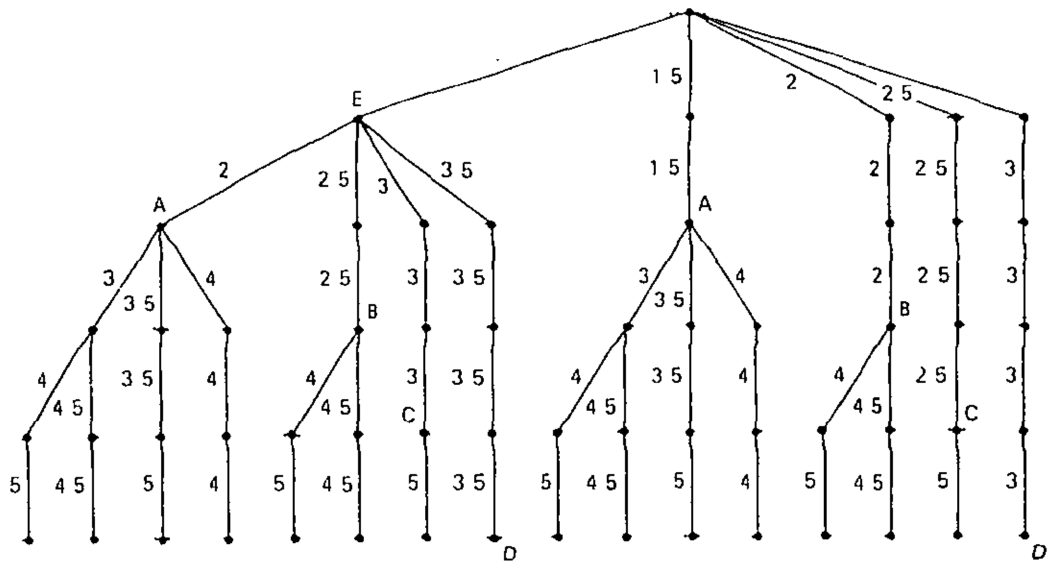


Fig 7 Arbol con los posibles valores para b cuando $n = 5$

3 3 1 Algoritmo de Solucion

Aqui se presenta el algoritmo del Metodo de Minima Varianza para determinar el ordenamiento de consenso en el que se consideran los empates

Primero se arreglan los objetos de tal forma que $\bar{s}_1 \leq \bar{s}_2 \leq \quad \leq \bar{s}$ para iniciar con los pasos del algoritmo

Paso 1 Sea $j = 1$

Crear los n ordenamientos parciales $\{\mathbf{P}(i)\}_{1}$ donde $\mathbf{P}(i)$ denota el ordenamiento parcial que contiene los i elementos 1 2 $\quad i$ empatados con el rango $(i+1)/2$

Calcular las correspondientes n sumas parciales

$$\left\{ L = \sum_{k\ 1} \left(\bar{s}_k - \frac{i+j}{2} \right)^2 \right\}_1$$

Ir al paso 2

Paso 2 Sea $j = j + 1$

Si $j = n + 1$ ir al paso 5 De otro modo usar el ordenamiento parcial $\mathbf{P}(j-1)$ y crear los $n-(j-1)$ ordenamientos parciales descendientes $\left\{\mathbf{P}^{j}(i)\right\}_{j}$ donde $\mathbf{P}^{j}(i)$ concuerda con $\mathbf{P}(j-1)$ para los objetos 1 2 $j-1$ y tiene los objetos j $j+1$ i empatados con rango $(j+i)/2$

Calcular las sumas parciales asociadas

$$\left\{L_{j} = L_{j\,1} + \sum_{k\,j}\left(\bar{s}_k - \frac{i+j}{2}\right)^2\right\}_{j}$$

Sea $i = j$ ir al paso 3

Paso 3 Si $\mathrm{L}_{ji} \geq \mathrm{L}_{i}$ dejar el ordenamiento parcial $\mathbf{P}^{j}(i)$ y el L_{j} asociado fuera de consideracion Ir al paso 4

Si $\mathrm{L}_{j} < \mathrm{L}$ hacer $\mathbf{P}(i) = \mathbf{P}^{j}(i)$ es decir reemplazar el ordenamiento parcial previo de los primeros i objetos por el ordenamiento parcial $\mathbf{P}^{j}(i)$

Sea $\mathrm{L} = \mathrm{L}_{j}$ Ir al paso 4

Paso 4 Si $i = n$ ir al paso 2 de otra manera, hacer $i = i + 1$ e ir al paso 3

Paso 5 $\mathbf{P}(n)$ es el ordenamiento optimo

Para simplificar la descripcion del algoritmo se puede ignorar la posibilidad de alternar los ordenamientos medios cuando $\mathrm{L}_{ji} = \mathrm{L}$ Pero se puede modificar el paso 3 y considerar el caso cuando $\mathrm{L}_{ji} = \mathrm{L}$ para tomar en cuenta los promedios alternos

3 3 2 Ejemplo

Un comite de cinco miembros suministra los siguientes ordenamientos de cinco objetos

$A^1 = (2\ 3\ 5\ 1\ 4)$ $A^2 = (1\ 3\ 4\ 2\ 5)$ $A^3 = (2\ 4\ 5\ 1\ 3)$ $A^4 = (1\ 4\ 3\ 2\ 5)$ $A^5 = (3\ 2\ 5\ 1\ 4)$

El punto promedio es $(1\ 8\ \ 3\ 2\ \ 4\ 4\ \ 1\ 4\ \ 4\ 2)$ pero se utiliza $\overline{\mathrm{S}} = (1\ 4\ \ 1\ 8\ \ 3\ 2\ \ 4\ 2\ \ 4\ 4)$ y los objetos se reordenan asi $(d\ \ a\ \ b\ \ e\ \ c)$

Utilizando el algoritmo se tiene que

Paso1 $j = 1$

Los ordenamientos parciales son | Las sumas parciales son

$\mathbf{P}(1) = (1\ -\ -\ -\ -)$ $\qquad$ $\mathrm{L}_1 = 0\ 16$

$\mathbf{P}(2) = (1\ 5\ \ 1\ 5\ -\ -\ -)$ $\qquad$ $\mathrm{L}_2 = 0\ 1$

$\mathbf{P}(3) = (2\ \ 2\ \ 2\ -\ -)$ $\qquad$ $\mathrm{L}_3 = 1\ 84$

$\mathbf{P}(4) = (2\ 5\ \ 2\ 5\ \ 2\ 5\ \ 2\ 5\ -)$ $\qquad$ $\mathrm{L}_4 = 5\ 08$

$\mathbf{P}(5) = (3\ \ 3\ \ 3\ \ 3\ \ 3)$ $\qquad$ $\mathrm{L}_5 = 7\ 44$

Paso 2 $j = 2$

Se escoge la rama $\mathbf{P}(1)$ y se crean las ramas descendientes | Las sumas parciales

$\mathbf{P}^2(2) = (1\ 2\ -\ -\ -)$ $\qquad$ $\mathrm{L}_{22} = 0\ 16 + (0\ 2)^2 = 0\ 20$

$\mathbf{P}^2(3) = (1\ \ 2\ 5\ \ 2\ 5\ -\ -)$ $\qquad$ $\mathrm{L}_{23} = 1\ 14$

$\mathbf{P}^2(4) = (1\ \ 3\ \ 3\ \ 3\ -)$ $\qquad$ $\mathrm{L}_{24} = 3\ 08$

$\mathbf{P}^2(5) = (1\ \ 3\ 5\ \ 3\ 5\ \ 3\ 5\ \ 3\ 5)$ $\qquad$ $\mathrm{L}_{25} = 4\ 44$

Pasos 3 y 4 $i = 2$

Como $L_{22} > L_2$ entonces no se utiliza $P^2(2)$ para las siguientes comparaciones

Puesto que L_{23} L_{24} y L_{25} son menores que L_3 L_4 y L_5 respectivamente entonces $\mathbf{P}^2(i)$ reemplaza a $\mathbf{P}(i)$ y L_2 reemplaza a L para $i = 3$ 4 5 Ahora se tiene que

$\mathbf{P}(2) = (1\ 5\ 1\ 5\ -\ -\ -)$ $L_2 = 0\ 1$

$\mathbf{P}(3) = (1\ \ 2\ 5\ \ 2\ 5\ -\ -)$ $L_3 = 1\ 14$

$\mathbf{P}(4) = (1\ \ 3\ \ 3\ \ 3\ -)$ $L_4 = 3\ 08$

$\mathbf{P}(5) = (1\ \ 3\ 5\ \ 3\ 5\ \ 3\ 5\ \ 3\ 5)$ $L_5 = 4\ 44$

Paso 2 $j = 3$

Se escoge la rama $\mathbf{P}(2)$ y se crean las ramas descendientes

Sumas parciales

$\mathbf{P}^3(3) = (1\ 5\ \ 1\ 5\ \ 3\ -\ -)$ $L_{33} = 0\ 14$

$\mathbf{P}^3(4) = (1\ 5\ \ 1\ 5\ \ 3\ 5\ \ 3\ 5\ -)$ $L_{34} = 0\ 68$

$\mathbf{P}^3(5) = (1\ 5\ \ 1\ 5\ \ 4\ \ 4\ \ 4)$ $L_{35} = 0\ 94$

Pasos 3 y 4 $i = 3$

Como L_{33} L_{34} y L_{35} son menores que L_3 L_4 y L_5 se obtiene

$\mathbf{P}(3) = (1\ 5\ \ 1\ 5\ \ 3\ -\ -)$ $L_3 = 0\ 14$

$\mathbf{P}(4) = (1\ 5\ \ 1\ 5\ \ 3\ 5\ \ 3\ 5\ -)$ $L_4 = 0\ 68$

$\mathbf{P}(5) = (1\ 5\ \ 1\ 5\ \ 4\ \ 4\ \ 4)$ $\qquad$ $L_5 = 0\ 94$

Paso 2 $j = 4$

Se escoge la rama $\mathbf{P}(3)$ y se crean las ramas descendientes

Sumas parciales

$\mathbf{P}^4(4) = (1\ 5\ \ 1\ 5\ \ 3\ \ 4\ \ -)$ $\qquad$ $L_{44} = 0\ 18$

$\mathbf{P}^4(5) = (1\ 5\ \ 1\ 5\ \ 3\ \ 4\ 5\ \ 4\ 5)$ $\qquad$ $L_{45} = 0\ 24$

Pasos 3 y 4 $i = 4$

Nuevamente L_{44} y L_{45} son menores así que se obtiene

$\mathbf{P}(4) = (1\ 5\ \ 1\ 5\ \ 3\ \ 4\ \ -)$ $\qquad$ $L_4 = 0\ 18$

$\mathbf{P}(5) = (1\ 5\ \ 1\ 5\ \ 3\ \ 4\ 5\ \ 4\ 5)$ $\qquad$ $L_5 = 0\ 24$

Paso 2 $j = 5$

Se escoge la rama $\mathbf{P}(4)$ y se crea la rama descendiente

Sumas parciales

$\mathbf{P}^5(5) = (1\ 5\ \ 1\ 5\ \ 3\ \ 4\ \ 5)$ $\qquad$ $L_{55} = 0\ 54$

Pasos 3 y 4 $i = 5$

Como $L_{22} > L_2$ se descarta $\mathbf{P}^5(5)$

Paso 5

El ordenamiento medio es $\mathbf{P}(5) = (1\ 5\ \ 1\ 5\ \ 3\ \ 4\ 5\ \ 4\ 5)$

Como el ordenamiento medio encontrado corresponde al etiquetado de los objetos con el arreglo $(d\ \ a\ \ b\ \ e\ \ c)$ se deben reordenar los objetos de acuerdo al etiquetado original es decir con el arreglo$\left(a\ b\ c\ d\ e\right)$ Utilizando este arreglo el ordenamiento medio es

$\mathbf{B} = \left(1\ 5\ \ 3\ \ 4\ 5\ \ 1\ 5\ \ 4\ 5\right)$

La distancia entre el punto promedio $\overline{\mathbf{S}}$ y el ordenamiento medio $\mathbf{B}$ obtenido es

$$\mathrm{d}(\overline{\mathbf{S}}\ \mathbf{B}) = \sum_{1}^{m}(\bar{s}\ \ - b\ )^2 = (1\ 8-1\ 5)^2 + (3-3)^2 + (4\ 5-5)^2 + (1\ 5-1)^2 + (4\ 5-4)^2 = 0\ 24$$

Ahora, al ejemplo se le aplicara el método de Borda Kendall para obtener el ordenamiento medio

Se suman los rangos que ocupa cada alternativa de los cinco ordenamientos

$$b_1 = \sum_{i\ 1}^{5} a_1^i = 2 + 1 + 2 + 1 + 3 = 9$$

$$b_2 = \sum_{i\ 1}^{5} a_2^i = 3 + 3 + 4 + 4 + 2 = 16$$

$$b_3 = \sum_{i\ 1}^{5} a_3^i = 5 + 4 + 5 + 3 + 5 = 22$$

$$b_4 = \sum_{i\ 1}^{5} a_4^i = 1 + 2 + 1 + 2 + 1 = 7$$

$$b_5 = \sum_{i\ 1}^{5} a_5^i = 4 + 5 + 3 + 5 + 4 = 21$$

Luego se ordenan las alternativas de acuerdo con la sumas de las posiciones de menor a mayor La alternativa con la menor suma se ordena primero y asi sucesivamente El ordenamiento resultante es $\left(2\ \ 3\ \ 5\ \ 1\ \ 4\right)$

La distancia entre el punto promedio $\overline{\mathbf{S}}$ y el ordenamiento medio $\mathbf{B}$ obtenido por el metodo de Borda Kendall es

$$d(\bar{\mathbf{S}}\ \mathbf{B}) = \sum_{1}^{m}(\bar{s} \ -b\ )^2 = (1\ 8-2)^2 + (3\ 2-3)^2 + (4\ 4-5)^2 + (1\ 4-1)^2 + (4\ 2-4)^2 = 0\ 64$$

Esta dıstancıa es mayor que la dıstancıa entre el punto promedıo y el ordenamıento medıo obtenıdo por el metodo de Mınıma Varıanza (0 64/0 24 = $2\frac{2}{3}$)

3 4 Ordenamıento de Consenso utılızando la metrıca ℓ^1

La dıstancıa $d(\mathbf{A}\ \mathbf{B}) = \sum_{1}^{m}|a \ -b\ |$ que se determıno en el Capıtulo 1 sırve para determınar un ordenamıento de consenso Este ordenamıento sera el que mejor refleje las opınıones combınadas de los mıembros de un comıte Para esto consıderemos el problema en que m mıembros de un comıte han determınado una serıe de ordenamıentos ordınales de n objetos $\left\{\mathbf{A}^{l}\right\}_{l\ 1}^{m}$ donde $\mathbf{A}^{l} = \left(a_1^l\ a_2^l\ \quad a^l\right)$ El grado de acuerdo se tomara en termınos de la dıstancıa total absoluta en el conjunto de los m ordenamıentos $\left\{\mathbf{A}^{l}\right\}_{l\ 1}^{m}$ O sea, a menor dıstancıa mejor grado de acuerdo Esto nos lleva a la sıguıente defınıcıon

Defınıcıón 3 4 1

Sea $\mathrm{B} \in \mathbb{R}$ Un ordenamıento **B** se dıce que es la *medıana* de los ordenamıentos u *ordenamıento de consenso* sı mınımıza la dıstancıa total absoluta

$$M(\mathrm{B}) = \sum_{l\ 1}^{m} d(\mathbf{A}^{l}\ \mathrm{B}) = \sum_{l\ 1}^{m}\sum_{1}|a^{l} - b\ |$$

De acuerdo con esta medıda, **B** es el ordenamıento que esta en mejor acuerdo con el conjunto de m ordenamıentos seleccıonados y se utılızara como crıterıo para obtener el consenso de opınıones

Teorema 3 4 1 Sea $\left\{\mathbf{A}^{l}\right\}_{l\ 1}^{m}$ un conjunto de ordenamientos $\mathbf{B}$ el conjunto de todos los ordenamientos de n objetos y $\mathbf{B}$ el vector dado por

$$\mathbf{B} = \left(b_1\ b_2 \qquad b\ \right) \quad \text{con} \quad b = \text{mediana}\{a^l\}_{l\ 1}^{m}$$

Si $\mathbf{B} \in \mathbf{B}$ entonces $\mathbf{B}$ es la mediana de los ordenamientos

Demostracion Consideremos a $\mathbf{B}$ el conjunto de todos los ordenamientos de n objetos Entonces

$$\min_{B\ \mathbf{B}}\left\{\sum_{l\ 1}^{m}\mathrm{d}(\mathbf{A}^{l}\ \mathrm{B})\right\} \geq \min_{\mathrm{B}\in\mathbb{R}}\left\{\sum_{l\ 1}^{m}\mathrm{d}(\mathbf{A}^{l}\ \mathrm{B})\right\} = \min_{\mathrm{B}\ \mathbb{R}}\left\{\sum_{l\ 1}^{m}\sum_{1}\left|a^{l} - b_{i}\right|\right\} \tag{3}$$

Esto se debe a que el miembro de la izquierda, por ser distancia entre ordenamientos el menor valor positivo que toma es 1 mientras que el lado derecho puede tomar valores menores que 1

Empleando la tecnica de los multiplicadores de Lagrange se establece que cuando $\mathbf{B}$ es el vector definido por

$$\mathbf{B} = \left(b_1\ b_2 \qquad b\ \right) \quad \text{con} \quad b = \text{mediana}\ \{a^l\}_{l\ 1}^{m}$$

el lado derecho de (1) alcanza su menor valor Por lo tanto

$$M(\mathbf{B}') \leq M(\mathrm{B}) \quad \text{para todo } \mathrm{B} \in \mathbf{B}$$

Usualmente el vector $\mathbf{B}$ no es un elemento del conjunto de los ordenamientos de n objetos pero si se restringe $\mathbf{B}$ al conjunto de ordenamientos completos el problema puede ser formulado por las tecnicas de la programacion lineal A continuacion presentaremos dos de estos modelos

3 4 1 Modelo 1

Las preferencıas $\left(a^l\right)$ del l esımo mıembro del grupo son consıderadas como metas por lo tanto el objetıvo es obtener un vector de consenso B tal que para todo $\imath$ b esta lo mas cercano posıble a la correspondıente componente a^l para todo $\imath$ y l Utılızando esta ınterpretacıon se tıene el sıguıente problema lıneal

$$\min\left\{\sum_{l\ 1}^{m}\sum_{1}\left(d^l \ + d^l \ \right)\right\}$$

$$\text{sujeto a} \quad b + d^l \ + d^l \ = a^l \qquad \text{para todo} \quad \imath \ l$$

$$\sum_{J} b \geq \sum_{1}^{k} \imath \qquad k = 1\ 2 \qquad n$$

$$b \quad d^{l\ 1} \quad d^l \ \geq 0 \qquad \text{para todo } \imath \ l$$

donde los subconjuntos J_k consısten de k enteros es decır $J_k \subseteq \{1\ 2 \quad n\}$

Este modelo lıneal esta formado por 2 – 1 + *mn* restrıccıones y (2*m* + 1)*n* varıables Luego es mas factıble resolver el dual de este problema que tendrıa solo (2*m* + 1)*n* restrıccıones

3 4 2 Modelo 2

El problema planteado arrıba se puede descrıbır como un problema de asıgnacıon Para ello se define

$$d_k = \sum_{l\ 1}^{m} \left| \ a^l - k \ \right| \qquad \imath \ k \in \{1\ 2 \qquad n\}$$

Como

$$\sum_{l=1}^{m} \mathrm{d}(\mathbf{A}^l \ \mathbf{B}) = \sum_{1} \sum_{l\ 1}^{m} \left|a^l - b\ \right| \tag{4}$$

se observa que d_k es el valor de la $\imath$ esima suma en (2) si $b = k$ $k \in \{1\ 2 \quad n\}$

Si se define

$$x_k = \begin{cases} 1 & \text{si } b = k \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

el problema es equivalente al siguiente problema de asignacion

$$\min \left\{ \sum_{\imath} \sum_{k} d_{\imath k} x_{\imath k} \right\}$$

$$\text{sujeto a} \quad \sum_{\imath} x_k = 1 \quad \text{para todo } k$$

$$\sum_{k} x_k = 1 \quad \text{para todo } \imath \tag{5}$$

$$x_k \geq 0 \quad \text{para todo } \imath\ k$$

Existen procedimientos de solucion muy efectivos para resolver el problema (5) por lo tanto el modelo 2 se puede utilizar para resolver problemas en los cuales intervienen muchas variables

El siguiente ejemplo se resolvera utilizando el modelo 2

3 4 3 Ejemplo de aplicacion

Un problema comun a la hora de planear y disenar una carretera es la seleccion de la ruta que se seguira En particular nos referimos al problema de la escogencia de los lugares mas apropiados para construir un corredor

El problema de la determinacion de la ruta del corredor es un problema interesante que debe tomar en cuenta los posibles efectos (parametros de impacto) que tendra su uso Se estudian entre otras categorias los usuarios el desarrollo regional que puede darse el ımpacto ambıental los beneficıos socıales y economıcos el derecho de vıa y los costos La construccıon o determınacıon de un corredor puede ınferır negatıva o posıtıvamente en la vıda de las personas ya que puede ser una fuente de bıenestar o de molestıa

El problema que se plantea consıdera su naturaleza ordınal Se muestra como combınar la ınformacıon ordınal que se obtıene para lograr un consenso en cuanto a la escogencıa de una determınada ruta del corredor con base en cada dımensıon o categorıa. Luego se descrıbe un procedımıento para combınar los ordenamıentos que toma en cuenta las categorıas dadas

Asumamos que cada mıembro de un grupo de ındıvıduos o comıte (Mınısterıo de Obras Publıcas Corregımıentos Empresa Constructora Prıvada Comıté de Apoyo etc) se le asıgna la tarea de prıorızar una ruta, de acuerdo a las categorıas asocıadas

Para cada categorıa cualıtatıva i asumımos que cada mıembro j del comıte nos da un ordenamıento ordınal $\left(a^1\ a^2 \quad a^l \quad a^I\right)$ donde a^l es el rango asıgnado a la l ésıma ruta de acuerdo con la i esıma categorıa

Por ejemplo sı $i=1$ representa la categorıa desarrollo regıonal y hay 5 rutas posıbles un ordenamıento ordınal puede ser de la forma (3 4 1 5 2) o sea, $a_1^1=3\ a_1^2=4\ a_1^3=1\ a_1^4=5\ a_1^5=2$ Ası a la ruta 1 se le asıgna la posıcıon 3 a la ruta 2 se le asıgna la posıcıon 4 etc

Al asıgnar un rango a cada ruta, se espera que cada mıembro del comıte tome en cuenta los beneficıos y costos de realızar el proyecto

Consıderemos un comıte conformado por 10 mıembros que ordena 5 rutas de acuerdo a su preferencıa.

Se utilizara la variable k para representar cada uno de los 5 rangos posibles la variable l para los 10 miembros y la variable i para los 5 objetos

El vector de ordenamiento de cada miembro es el siguiente

Miembro	ordenamiento		Miembro	ordenamiento
1	(1 4 3 5 2)		6	(1 4 3 2 5)
2	(4 3 1 4 2)		7	(4 1 5 3 2)
3	(3 2 5 4 1)		8	(1 3 4 2 5)
4	(1 4 2 5 3)		9	(3 1 5 4 2)
5	(2 5 4 1 3)		10	(3 4 2 1 5)

Se construye la matriz distancia (d_{ik}) donde d_{ik} es la suma de las desviaciones entre el rango k y los 10 rangos a^l dados del objeto i para cada miembro l Así

$$d_{11} = \sum_{l=1}^{m} \left| a_1^l - 1 \right| = 0 + 3 + 2 + 0 + 1 + 0 + 3 + 0 + 2 + 2 = 13$$

$$d_{21} = \sum_{l=1}^{m} \left| a_2^l - 1 \right| = 3 + 2 + 1 + 3 + 4 + 3 + 0 + 2 + 0 + 3 = 21$$

$$d_{31} = \sum_{l=1}^{m} \left| a_3^l - 1 \right| = 2 + 0 + 4 + 1 + 3 + 2 + 4 + 3 + 4 + 1 = 24$$

$$d_{41} = \sum_{l=1}^{m} \left| a_4^l - 1 \right| = 4 + 4 + 3 + 4 + 0 + 1 + 2 + 1 + 3 + 0 = 22$$

$$d_{51} = \sum_{l=1}^{m} \left| a_5^l - 1 \right| = 1 + 1 + 0 + 2 + 2 + 4 + 1 + 4 + 1 + 4 = 20$$

$$d_{12} = \sum_{l=1}^{m} \left| a_1^l - 2 \right| = 1 + 2 + 1 + 1 + 0 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1 = 11$$

$$d_{22} = \sum_{l=1}^{m} \left| a_2^l - 2 \right| = 2 + 1 + 0 + 2 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1 + 2 = 15$$

$$d_{32} = \sum_{l=1}^{m} \left| a_3^l - 2 \right| = 1 + 1 + 3 + 0 + 2 + 1 + 3 + 2 + 3 + 0 = 16$$

$$d_{42} = \sum_{l=1}^{m} \left| a_4^l - 2 \right| = 3 + 3 + 2 + 3 + 1 + 0 + 1 + 0 + 2 + 1 = 16$$

$$d_{52} = \sum_{l=1}^{m} \left| a_5^l - 2 \right| = 0 + 0 + 1 + 1 + 1 + 3 + 0 + 3 + 0 + 3 = 12$$

$$d_{13} = \sum_{l=1}^{m} \left| a_1^l - 3 \right| = 2 + 1 + 0 + 2 + 1 + 2 + 1 + 2 + 0 + 0 = 11$$

$$d_{23} = \sum_{l=1}^{m} \left| a_2^l - 3 \right| = 1 + 0 + 1 + 1 + 2 + 1 + 2 + 0 + 2 + 1 = 11$$

$$d_{33} = \sum_{l=1}^{m} \left| a_3^l - 3 \right| = 0 + 2 + 2 + 1 + 1 + 0 + 2 + 1 + 2 + 1 = 12$$

$$d_{43} = \sum_{l=1}^{m} \left| a_4^l - 3 \right| = 2 + 2 + 1 + 2 + 2 + 1 + 0 + 1 + 1 + 2 = 14$$

$$d_{53} = \sum_{l=1}^{m} \left| a_5^l - 3 \right| = 1 + 1 + 2 + 0 + 0 + 2 + 1 + 2 + 1 + 2 = 12$$

$$d_{14} = \sum_{l=1}^{m} \left| a_1^l - 4 \right| = 3 + 0 + 1 + 3 + 2 + 3 + 0 + 3 + 1 + 1 = 17$$

$$d_{24} = \sum_{l=1}^{m} \left| a_2^l - 4 \right| = 0 + 1 + 2 + 0 + 1 + 0 + 3 + 1 + 3 + 0 = 11$$

$$d_{34} = \sum_{l=1}^{m} \left| a_3^l - 4 \right| = 1 + 3 + 1 + 2 + 0 + 1 + 1 + 0 + 1 + 2 = 12$$

$$d_{44} = \sum_{l=1}^{m} \left| a_4^l - 4 \right| = 1 + 1 + 0 + 1 + 3 + 2 + 1 + 2 + 0 + 3 = 14$$

$$d_{54} = \sum_{l=1}^{m} \left| a_5^l - 4 \right| = 2+2+3+1+1+1+2+1+2+1 = 16$$

$$d_{15} = \sum_{l=1}^{m} \left| a_1^l - 5 \right| = 4+1+2+4+3+4+1+4+2+2 = 27$$

$$d_{25} = \sum_{l=1}^{m} \left| a_2^l - 5 \right| = 1+2+3+1+0+1+4+2+4+1 = 19$$

$$d_{35} = \sum_{l=1}^{m} \left| a_3^l - 5 \right| = 2+4+0+3+1+2+0+1+0+3 = 16$$

$$d_{45} = \sum_{l=1}^{m} \left| a_4^l - 5 \right| = 0+0+1+0+4+3+2+3+1+4 = 18$$

$$d_{55} = \sum_{l=1}^{m} \left| a_5^l - 5 \right| = 3+3+4+2+2+0+3+0+3+0 = 20$$

La matriz distancia (d_{ik}) es la siguiente

$$(d_k) = \begin{pmatrix} 13 & 11 & 11 & 17 & 27 \\ 21 & 15 & 11 & 11 & 19 \\ 24 & 16 & 12 & 12 & 16 \\ 22 & 16 & 14 & 14 & 18 \\ 20 & 12 & 12 & 16 & 20 \end{pmatrix}$$

Utilizando el algoritmo apropiado para resolver problemas de asignacion se obtiene el siguiente cuadro que muestra el vector de consenso

	Prioridad				
Objeto	1	2	3	4	5
1	1	0	0	0	0
2	0	0	1	0	0
3	0	0	0	1	0
4	0	0	0	0	1
5	0	1	0	0	0

Esto indica que $\mathbf{B} = (1\ 3\ 4\ 5\ 2)$ y $M(\mathbf{B}) = 66$ es la minima distancia Revisando la matriz distancia se observa que pueden existir medianas alternas por ejemplo $\mathbf{B} = (1\ 4\ 3\ 5\ 2)$

El modelo 2 es un hibrido de las tecnicas de Kendall y de Kemeny Snell La tecnica de Kemeny Snell es similar en su caracterizacion axiomatica sin embargo representan los ordenamientos por matrices lo que complica el problema La representacion por matrices no contiene mas informacion que la representacion vectorial que se utiliza ademas que consume gran cantidad de almacenamiento computacional Para problemas muy grandes podria llegar a ser critico

El metodo de Kendall es probablemente el mas popular debido a su simplicidad computacional Su representacion es vectorial pero su tecnica no conduce a un consenso que posea los atributos de la tecnica de Kemeny y Snell

Tambien se dispone de la regla mayoritaria para la formacion de consensos Las desventajas de esta tecnica son parecidas a las del metodo de Kendall Ademas si no se garantiza la transitividad es necesario ir a una formulacion de programacion entera

3 5 Formación de consenso para el caso de empates

La medida de distancia puede ser utilizada en un sin numero de formas para definir un ordenamiento de consenso Para cada p la metrica l^p puede utilizarse para seleccionar un vector de consenso **B** donde **B** satisface

$$M(\mathbf{B}) = \underset{\mathbf{B}}{\text{minimo}}\left\{\sum_{i\ 1}^{m} \mathrm{d}^{p}\left(\mathbf{A}^{i}\ \mathbf{B}\right)\right\}^{\frac{1}{p}}$$

El minimo es tomado sobre todos los vectores de prioridad **B**

En la seccion anterior se utilizo la métrica l^1 para determinar **B** resolviendo un cierto problema de asignación para los problemas de ordenamiento completo Ahora se examinara el problema general que permite los empates en las preferencias

Si se consideran todos los ordenamientos **B** entonces los rangos posibles que un objeto puede tomar son 1 1 5 2 2 5 $n-1$ $n-\frac{1}{2}$ n

Para este caso general el problema (4) queda formulado asi

$$\min_{n}\left\{\sum_{1}\sum_{k\ 2}^{2} d_{k/2}\, x_{k/2}\right\}$$

$$\text{sujeto a} \quad \sum_{k\ 2}^{2} x_{k/2} = 1 \qquad \text{para todo } i \tag{6}$$

$$\sum_{1} x_{k/2} = \Delta_{k/2} \qquad \text{para } k=2 \quad 2n$$

$$x_{k/2} \geq 0 \qquad \text{para todo } i\ k$$

donde $\quad d_{ik/2} = \sum_{l=1}^{m} \left| a^l - k/2 \right| \qquad i \in \{1\ 2 \quad n\} \quad k \in \{2\ 3 \quad 2n\}$

El vector $\Delta = (\Delta_1\ \Delta_{1\,5}\ \Delta_2\ \Delta_{2\,5} \quad \Delta\ )$ esta restringido a valores que proporcionaran un ordenamiento elegible Para el caso completo $\Delta = (1\ 0\ 1\ 0 \quad 1\ 0\ 1)$

Para cualquier vector elegible Δ el problema (6) es un problema de transporte que puede ser resuelto facilmente Sin embargo si n es grande hay que considerar una gran cantidad de vectores Δ y sus correspondientes soluciones

Para presentar una perspectiva clara sobre el tamano y la estructura del problema que se esta tratando se disena una representacion poliedrica de los vectores elegibles Δ Esto conducira a un problema de programacion cero uno produciendo una estructura que examinara las posibles opciones para determinar un ordenamiento optimo

Para ello se definen las variables Y_{rs} y $\Delta_{k/2}$ de la siguiente forma

$$Y_{rs} = \begin{cases} 1 & \text{si los rangos } r \text{ y } s \text{ se combinan para producir} \\ & \text{un rango medio entre } r \text{ y } s \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\text{para} \quad r = 1\ 2 \quad n \qquad s = 1\ 2 \quad n$$

y sea $\quad \Delta_{k/2} = \sum_{1}^{k-1} Y_k$

Para asegurar que el conjunto de valores $\Delta_{k/2}$ constituye un ordenamiento se agregan las siguientes restricciones

$$Y_k \quad - Y_k \ \ {}_1 \ \ {}_1 \geq 0 \qquad s \geq k - s \tag{7}$$

$$Y_{rs} - Y_{sr} = 0 \qquad \text{para todo } r \ \ s \tag{8}$$

$$\sum_{1} Y_{rs} = 1 \qquad \text{para todo } s \tag{9}$$

$$\sum_{1} Y \ \ = 1 \qquad \text{para todo } r \tag{10}$$

Una interpretacion ilustrativa de estas restricciones puede verse en la tabla siguiente para n = 5

			1	1 5	2 2 5	
r	1	2	3	4	5	3
1	Y_{11}	Y_{12}	Y_{13}	Y_{14}	Y_{15}	3 5
2	Y_{21}	Y_{22}	Y_{23}	Y_{24}	Y_{25}	4
3	Y_{31}	Y_{32}	Y_{33}	Y_{34}	Y_{35}	4 5
4	Y_{41}	Y_{42}	Y_{43}	Y_{44}	Y_{45}	5
5	Y_{51}	Y_{52}	Y_{53}	Y_{54}	Y_{55}	

La restriccion (7) indica por ejemplo que si los rangos 1 y 4 estan empatados $(Y_{14} = 1)$ en el nivel 2 5 entonces los rangos 2 y 3 tambien deben estar empatados $(Y_{23} = 1)$ en el mismo nivel

Las restricciones (8) son condiciones simetricas es decir si los rangos r y s están empatados entonces los rangos s y r tambien lo estan

Las restricciones (9) y (10) implican que para cualquier r (o s) a lo más una variable Y_{rs} $(\text{o } Y_{sr})$ puede tomar el valor de 1 es decir que si $Y_{25} = 1$ no hay otro elemento en la segunda fila que sea distinto de cero Los rangos 2 y 3 tambien estan empatados pero esta sıtuacıon se toma en cuenta por la definıcıon de los Y_{rs} y las condıcıones ımpuestas sobre ellos

Las cuatro restrıccıones componen el conjunto mınımo de restrıccıones necesarıas que garantızan que el vector $\mathbf{\Delta}$ sea un ordenamıento elegıble

El problema (6) puede ser formulado como un problema de programacıon cero uno al agregarle las cuatro restrıccıones anterıores y puede ser consıderado como un problema de transporte con demandas varıables restrıngıdas a los destınos ındıvıduales pero con la demanda total fija Por las restrıccıones adıcıonales la propıedad unımodular que posee el problema (6) es elımınada

El problema de programacıon cero uno queda escrıto de la sıguıente forma

$$\min_{l}\left\{\sum_{1}\sum_{k\;2}^{2} d_{k/2}\,x_{k/2}\right\}$$

$$\text{sujeto a} \qquad \sum_{k\;2}^{2} x_{k/2} = 1 \qquad \text{para todo } \imath$$

$$\sum_{1} x_{lk/2} - \sum_{1}^{k\;1} Y_{k} \quad = 0 \qquad \text{para } k{=}2 \quad 2n$$

$$Y_{k} \quad - Y_{k \quad 1,s\;1} \geq 0 \qquad \text{para } s \geq k - s \qquad \text{(P1)}$$

$$Y_{rs} - Y \;\; = 0 \qquad \text{para todo } r \;\; s$$

$$\sum_{1} Y_{rs} = 1 \qquad \text{para todo } s$$

$$\sum_{1} Y_{rs} = 1 \qquad \text{para todo } r$$

$$x_{k/2} \;\; Y_{rs} \in \{0\;1\} \qquad \text{para todo } \imath \;\; k \;\; r \;\; s$$

Teorema 3 5 1

El poliedro convexo determinado por las restricciones (7) (8) (9) (10) y $Y_{rs} \geq 0$ tiene puntos extremos enteros

El poliedro determinado en P1 posee en la mayoria de los casos algunos puntos extremos no enteros En consecuencia, la aproximacion del problema utilizando programacion lineal estricta no obtendra, generalmente una solucion optima entera

Para *n* pequeño P1 podria resolverse directamente como un problema de programacion cero uno Sin embargo para *n* grande no es muy efectivo Es por ello que se presenta un algoritmo de bifurcacion y acotacion que utiliza la estructura especial que tiene el problema

3 5 1 Algoritmo de solucion Procedimiento de Bifurcacion y Acotacion

La filosofía basica de la bifurcacion y acotacion involucra la particion del espacio solucion del problema P1 hasta que la solucion optima sea reconocida

El metodo inicia relajando las restricciones del problema candidato inicial para formar un problema que pueda ser resuelto eficientemente Si la solución optima al problema relajado es factible para P1 entonces la solucion es optima para P1 De otra forma, se crean dos nuevos problemas candidatos colocando restricciones adicionales en P1 de manera que

a) La union de las regiones factibles para los dos nuevos problemas sea igual a la region factible de P1

b) La interseccion de las regiones factibles de los dos nuevos problemas sea vacia, y

c) Una relajacion de cualquiera de los dos nuevos problemas sea resuelta facilmente

Uno de los dos problemas candidatos es elegido para ser el problema candidato en curso y su relajacion es resuelta Esta estrategia de dividir y vencer es utilizada hasta que la region factible entera de P1 sea implicitamente examinada y haya sido determinada la solucion optima u ordenamiento de consenso

El problema candidato inicial es el siguiente

$$\min\left\{\sum_{1}\sum_{k\ 2}^{2} d_{k/2}\, x_{k/2}\right\}$$

(CP1)

$$\text{sujeto a} \quad \sum_{k\ 2}^{2} x_{k/2} = 1 \qquad \text{para } i = 1\ 2 \quad n$$

$$\sum_{1} x_{k/2} + z_{k/2} = b_{k/2} \qquad \text{para } k = 2 \quad 2n$$

$$0 \le x_{k/2} \le 1 \quad 0 \le z_{k/2} \le b_{k/2} \qquad \text{para } k = 2 \quad 2n$$

donde

$$b_{k/2} = \begin{cases} k-1 & \text{si } k \le n+1 \\ 2n-k+1 & \text{si } k > n+1 \end{cases}$$

El problema CP1 es un problema de transporte ponderado para el cual existe un algoritmo de solución eficiente También una solución entera óptima sera obtenida por un algoritmo de punto extremo Claramente CP1 es una relajacion de P1 Ahora queda por demostrar como una solución optima para CP1 puede ser identificada como un ordenamiento y como puede ser implementada una particion del espacio solucion de P1 Para ayudar en la realización de ambas acciones se formula el siguiente teorema

Teorema 3 5 2

Sea $(\bar{x}\ \bar{z})$ la representacion de una solucion entera factible a CP1 Sea $\bar{\Delta}_{k/2} = b_{k/2} - \bar{z}_{k/2}$ el numero de objetos asignados con el rango $k/2$

Para cada $l = 2\ 3 \quad 2n$ para el que $\bar{\Delta}_{k/2} \neq 0$ se define

$$C_{k/2} = 1 \quad \text{si} \quad l - \bar{\Delta}_{l/2} \leq k \leq l + \bar{\Delta}_{l/2} - 1 \ \text{ y } \ C_{k/2} = 0 \quad \text{en otro caso}$$

Se coloca una bandera en todas las posiciones dentro de mas $\bar{\Delta}_{l/2} - 1$ y menos $\bar{\Delta}_{l/2}$ de la posicion $l/2$ donde quiera que los objetos tengan asignado el rango de $l/2$

La solucion $\bar{x}$ define un ordenamiento si y solo si $C_{k/2} = 1$ para todo k

Demostracion La demostracion sera llevada a cabo por inducción

Para $n = 1$ y n=2 todos los ordenamientos posibles son enumerados facilmente y el teorema se cumple Se demostrara el resultado para $n = 3$

Para $n = 3$ los 13 ordenamientos posibles son los siguientes

1 (1 2 3)

2 (2 3 1)

3 (3 2 1)

4 (3 1 2)

5 (1 3 2)

6 (2 1 3)

7 (1 5 1 5 3)

8 (1 5 3 1 5)

9 (3 1 5 1 5)

10 (2 5 2 5 1)

11 (2 5 1 2 5)

12 (1 2 5 2 5)

13 (2 2 2)

Los ordenamientos del 1 al 6 producen los mismos valores Δ

$\Delta_1 = 1$ $\Delta_{1\,5} = 0$ $\Delta_2 = 1$ $\Delta_{2\,5} = 0$ $\Delta_3 = 1$ Con $\Delta_1 = 1$ $C_5 = C_1 = 1$ con $\Delta_2 = 1$ $C_{1\,5} = C_2 = 1$ y con $\Delta_3 = 1$ $C_{2\,5} = C_3 = 1$ Asi todos los $C_{k/2} = 1$

Los ordenamientos del 7 al 9 producen los mismos valores Δ

$\Delta_1 = 0$ $\Delta_{1\,5} = 2$ $\Delta_2 = 0$ $\Delta_{2\,5} = 0$ y $\Delta_3 = 1$ Con $\Delta_{1\,5} = 2$ $C_5 = C_1 = C_{1\,5} = 1$ y con $\Delta_3 = 1$ $C_{2\,5} = C_3 = 1$

Los ordenamientos del 10 al 12 tienen $\Delta_1 = 1$ $\Delta_{1\,5} = 0$ $\Delta_2 = 0$ $\Delta_{2\,5} = 2$ y $\Delta_3 = 0$ Con $\Delta_1 = 1$ $C_5 = C_1 = 1$ y con $\Delta_{2\,5} = 2$ $C_{1\,5} = C_2 = C_{2\,5} = C_3 = 1$

El ordenamiento 13 tiene $\Delta_2 = 3$ y todos los otros $\Delta_j = 0$ Esta asignacion de Δ_2 fija todos los $C_j = 1$

Si es utilizada cualquier asignacion que no constituya un ordenamiento se muestra facilmente que algun $C_{k/2}$ puede ser cero

Asi el teorema se ha demostrado para n = 3

Supongamos que el teorema es cierto para $n \leq \bar{n}$ Se debe mostrar que el teorema se cumple para n = $\bar{n} + 1$

Sea L el numero de objetos que tienen la mayor preferencia, esto es que todos los L objetos deben ser asignados con el rango $^{(L\ 1)}\!/_2$ y $C_{k/2} = 1$ para $k = 1 \quad 2L$ por esta asignacion El siguiente rango de preferencia mas grande que puede ser asignado a un objeto es L+1 Asi removiendo los L objetos con mayor preferencia en el problema de ordenamiento queda la situacion donde (n – L) objetos deben ser ordenados Por el proceso de induccion el teorema es cierto para n – L y por lo tanto es cierto para n

Dada una solucion factible a CP1 el Teorema 2 proporciona un procedimiento facilmente codificado para determinar si la solucion es o no es un ordenamiento El $\bar{\Delta}_{l/2}$ $\left(\text{o } \bar{\Delta}_{/2}\right)$ que causa que un $C_{k/2}$ sea puesto de primero una segunda vez es elegido como el candidato para ser restringido posteriormente La variable $\bar{\Delta}_{r/2}$ puede ser considerada $\geq \bar{\Delta}_{r/2}$ en una rama y $\leq \bar{\Delta}_{r/2}$ en la rama opuesta Ambas restricciones tienen un efecto sobre las variables de P1 si la solucion proporciona un ordenamiento

La restriccion $\Delta_{r/2} \geq \bar{\Delta}_{r/2}$ significa que el limite superior sobre $z_{r/2}$ es $b - \bar{\Delta}_{r/2}$ esto es que al menos $\bar{\Delta}_{r/2}$ objetos tienen asignados el rango *r*/2 Esta restriccion no elimina directamente la solucion optima al problema candidato relajado madre Sin embargo segun el Teorema 3 5 2 para cierto $\bar{\Delta}_{t/2}$ adyacente a $\bar{\Delta}_{r/2}$ el limite superior puede ser disminuido sin eliminar un posible ordenamiento La adicion de esas restricciones limites como lo estipula el teorema elimina la solucion optima al problema candidato relajado madre

La restriccion $\Delta_{r/2} \leq \bar{\Delta}_{r/2} - 1$ coloca un limite inferior de $b_{r/2} - \bar{\Delta}_{r/2} + 1$ sobre $z_{r/2}$ Es decir que a lo mas $\bar{\Delta}_{r/2} - 1$ objetos tienen asignados el rango *r*/2 y la solucion actual no es factible

Cuando se crean dos problemas candidatos se escoge siempre como el problema candidato el que tiene la restriccion $\Delta_{r/2} \geq \bar{\Delta}_{r/2}$ Un problema candidato puede ser abordado como el resultado de obtener un ordenamiento encontrando una solucion no factible u obteniendo un valor objetivo de programacion lineal mayor que el valor objetivo asociado con un ordenamiento Despues un problema candidato es abordado un nuevo problema candidato actual es elegido con la regla de decision ultimo que entra primero que sale El algoritmo dual de Armstrong Klingman y Whitman es utilizado para resolver todos los problemas de transporte con la solución final del ultimo problema candıdato examınado sumınıstrando una solucıon factıble dual ınıcıal para el problema candıdato relajado

El algorıtmo presentado para resolver el problema P1 es capaz de admıtır un numero de varıacıones a la formulacıón presentada Podrıa ser usual por ejemplo que muchas sıtuacıones requıeran que sea fijado un lımıte superıor sobre el numero de objetos que poseen el mısmo rango Esto podrıa lograrse facılmente definıendo $b_{k/2}$ como el numero de objetos permıtıdos con la posıcıon k/2 en vez del numero maxımo que actualmente esta consıderado en CP1

Un segundo requısıto en cıertas sıtuacıones es que se asıgnen pesos dıferencıados a los t mıembros del comıté En este caso $d_{k/2}$ se define como

$$d_{ik/2} = \sum_{1}^{m} W_t \left| a_j - \frac{k}{2} \right|$$

donde W_t es el peso cardınal atrıbuıdo al mıembro t

El procedımıento de bıfurcacıon y acotacıon presentado para resolver problemas de ordenamıento donde se permıten preferencıas con empate parece ser el más vıable Como se demostro anterıormente el numero de restrıccıones en P1 se hace muy grande conforme n aumenta por lo tanto serıa ıneficaz tratar de resolver P1 usando dırectamente cualquıer algorıtmo entero estandar

CONCLUSIONES

1 El metodo de Kendall es una tecnica sencilla que conduce a una aproximacion del consenso entre las preferencias de un grupo Utiliza la representacion vectorial para el ordenamiento de las alternativas Sin embargo no conduce a un consenso que posea las propiedades de una funcion de Seleccion Social

2 Los modelos de ordenamiento de consenso que utilizan la metrica ℓ^1 presentados en este trabajo son modelos híbridos de las tecnicas de Kendall y de Kemeny Snell Utilizan la representacion vectorial y cumplen con las propiedades que satisface una funcion de Seleccion Social Particularmente el modelo 2 resuelve el problema de la obtencion del consenso mediante la solucion de un problema de asignacion Esto facilita el manejo de problemas con un gran numero de alternativas

3 El Metodo de Borda Kendall y el Metodo de Minima Varianza determinan los mismos ordenamientos medios cuando se consideran ordenamientos completos Sin embargo cuando se permiten los empates entre las alternativas el metodo de Borda Kendall no conduce necesariamente a un ordenamiento medio

4 El Metodo de Minima Varianza provee un camino efectivo para derivar una solucion al problema de ordenamientos ordinales porque incluye el caso de ordenamientos con empates Este metodo selecciona el ordenamiento que mas se aproxima a los ordenamientos de los miembros de un comite

5 El metodo de Borda Kendall opera identificando las regiones con los ordenamientos Selecciona el ordenamiento completo asociado al cono si el punto promedio esta en el interior del cono Si el punto promedio esta en la frontera del cono entonces selecciona el ordenamiento con empates que esta asociado con la frontera Esto

ındıca que aunque el punto promedıo este muy cerca de un ordenamıento puede suceder que se escoȷa otro ordenamıento mas dıstante

6 En comparacıón con el metodo de Borda Kendall el metodo de Mınıma Varıanza seleccıona el ordenamıento que esta mas cerca del punto promedıo lo que meȷora la aproxımacıon encontrada medıante el metodo de Borda Kendall

7 Otros metodos conducen a un consenso que cumple con las propıedades que satısface una funcıon de bıenestar socıal y utılızan la representacıón matrıcıal para el ordenamıento de las alternatıvas Esta representacıon no contıene mas ınformacıon que la representacıon vectorıal por lo que el manejo de esos metodos para la obtencıon del consenso es mayor

BIBLIOGRAFIA

ARMSTRONG R D COOK W D y SEIFORD L 1982 Pnonty Rankıng and Consensus Formatıon The Case of Tıes The Borda Kendall Consensus Method for Pnonty Rankıng Problems En Management Scıence volumen 28 numero 6 Pags 638 645

BARBA ROMERO S y POMEROL J 1997 Decısıones Multıcnterıo Fundamentos teorıcos y Utılızacıon Practıca Prımera edıcıon Servıcıo de Publıcacıones Unıversıdad de Alcala 420 pags

BLACK DUNCAN The Theory of Commıttees and Electıons 1998 Kluwer Academıc Publıshıng

COOK WADE D 2006 Dıstance Based and Ad Hoc Consensus Models ın Ordınal Preference Ratıngs En Journal of Operatıons Research volume 172 numero 2 Pags 369 385

COOK W D y KREES M 1995 Theory and Methodology A general framework for dıstance based consensus ın ordınal rankıng models En European Journal of Operatıonal Research 96 Pags 392 397

COOK W D y KREES M 1992 Ordınal Informatıon & Preference Structures Decısıon Models and Applıcatıons Pnmera edıcıon Prentıce Hall Inc New Jersey 292 pags

COOK W D y SEIFORD L 1984 The Borda Kendall Consensus Method for Pnonty Rankıng Problems En Management Scıence volumen 28 numero 6 Pags 621 637

COOK W D y SEIFORD L 1978 Pnonty Rankıng and Consensus Formatıon En Management Scıence volumen 24 numero 16 Pags 1721 1732

FOSTER, MANUELA 1991 Un Metodo para la Agregacıon de Opınıones en la Toma de Decısıones Multıatnbuto con varıos decısores Tesıs doctoral Unıversıdad Nacıonal Autónoma de Mexıco Mexıco 131 pags

MUNIA NORBERTO 2011 A Strategy for Usıng Multıcntena and Analysıs ın Decısıon Makıng Fırst edıtıon Sprınger Verlag

PLOTT C R 1976 Axıomatıc Socıal Choıce Theory An Overvıew and Interpretatıon En Amencan Journal of Polıtıcal Scıence volume 20 No 3 Pags 511 596
RENA WEI & BEARD RANDAL 2007 Dıstnbuted Consensus ın Multı Vehıcle Cooperatıve Control Theory and Applıcatıons Fırst edıtıon Sprınger Verlag

VAN DEERMAN AD M A 1998 Coalıtıon Formatıon and Socıal Choıce Second edıtıon Kluwer Academıc Publıshıng

ANEXO A

ELECCION SOCIAL Y TEOREMA DE ARROW

ELECCION SOCIAL Y TEOREMA DE ARROW

Sean n votantes (o n criterios) teniendo n preordenes totales $\succcurlyeq_j$ sobre un conjunto de eleccion A Llamaremos PR al conjunto de todos los preordenes totales posibles sobre A los cuales seran $m!$ si A tiene m elementos y si solo consideramos preordenes estrictos (sin empates)

El problema de la eleccion social (o el problema de la agregacion de criterios) es la busqueda de una aplicacion de PR en PR la imagen de la funcion en PR define el preorden agregado o preorden social $\succcurlyeq_s$ Este problema lo planteo Kenneth Arrow en los años 50

Las propiedades que debe cumplir una funcion de agregacion se anuncian en los siguientes axiomas

1 Axioma de Universalidad

El dominio de definicion de la funcion de eleccion social es PR Esto quiere decir que cualquiera que sean los preórdenes de los votantes o las ordenaciones adoptadas por los criterios la funcion de eleccion social es funcional No se restringen las elecciones posibles de los votantes

2 Axioma de Unanimidad o de Pareto

Si para cada pareja de alternativas $(a\ b)$ ocurre que $a \succeq_j b$ para $j = 1\ 2 \quad n$ entonces la sociedad prefiere a la alternativa a que a la alternativa b Es decir $a \succeq\ b$

3 Axioma de independencia con respecto a las alternativas irrelevantes

Dado un conjunto de eleccion **A** determinado n preordenes totales (o criterios) $\succcurlyeq_j$ y un procedimiento de agregacion que genera un preorden agregado (o social) total $\succcurlyeq$ y un segundo sistema de preferencias $\succcurlyeq_j$ conduciendo a un preorden agregado $\succcurlyeq_s$ decimos que el procedimiento es independiente respecto a las alternativas irrelevantes si para cada $(a_1\ a_2) \in \mathbf{A}^2$ ocurre que

$$\left\{\forall j = 1\ 2 \quad n\ a_1 \succeq_j a_2 \Leftrightarrow a_1 \succeq_j a_2\right\} \text{ implica que } \left\{a_1 \succeq\ a_2 \Leftrightarrow a_1 \succeq\ a_2\right\}$$

Este axioma indica que para cualquier par de alternativas $(a_1\ a_2)$ si a_1 y a_2 estan clasificadas en cierto orden para todos los criterios (preordenes $\succcurlyeq_j$) y si estan clasificadas exactamente en el mismo orden para los preordenes $\succcurlyeq_j$ entonces el procedimiento de agregacion debe clasificarlas en el mismo orden Es decir el resultado del procedimiento con respecto a dos alternativas no debe depender mas que de las posiciones mutuas de dichas dos alternativas y no de las posiciones de las demás alternativas

4 Axioma de transitividad

La relacion social $\succcurlyeq_s$ de preferencia amplia es transitiva Este axioma somete a la sociedad a las mismas exigencias de racionalidad que a sus miembros

5 Axioma de totalidad

La relacion social es total Todo par $(a\ b)$ de alternativas esta en la relacion $a \succeq\ b$ $b \succeq\ a$ o $a \approx\ b$

Definicion

Para todo par de alternativas $(a\ b)$ si $a \succeq_j b$ entonces $a \succ\ b$ Es decir si el votante o agente j prefiere estrictamente a la alternativa a que a la alternativa b entonces la sociedad debe hacer lo mismo A j se le denomina dictador

Como cada agente es un dictador potencial existen n funciones dictatoriales de eleccion social

Teorema de Arrow

No hay otra funcion de eleccion social que cumpla los cinco axiomas que los procedimientos dictatoriales

El teorema de Arrow origino considerables estudios y discusiones La reaccion general fue discutir los cinco axiomas pero se considero que los axiomas de universalidad y transitividad eran los mas polemicos ya que los otros son muy naturales para ser cuestionados El axioma de independencia con respecto a las alternativas irrelevantes no puede contradecirse si no se quiere llegar a un procedimiento que pueda ser manejable